TẠP CHÍ ISSN: 1859-316X
KHOA HỌC CÔNG NGHỆ HÀNG HẢI
JOURNAL OF MARINE SCIENCE AND TECHNOLOGY

TÍNH TOÁN VÀ PHÂN TÍCH RẼ NHÁNH ĐỐI VỚI DAO ĐỘNG TUẦN HOÀN CỦA ĐỘNG CƠ TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

CALCULATION AND ANALYZING THE BIFURCATION FOR PERIODIC VIBRATIONS OF ENGINE ON ELASTIC FOUNDATION

HOÀNG MẠNH CƯỜNG

Viện Cơ khí, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

Email liên hệ: cuonghm@vimaru.edu.vn

Tóm tắt

Trong bài báo này trình bày việc tính toán dao động tuần hoàn và phân tích rẽ nhánh của nghiệm tuần toàn đối với cơ hệ gồm động cơ dạng piston một xi lanh đặt trên nền đàn hồi. Trước tiên, việc xây dựng mô hình dao động của động cơ trên đệm đàn hồi đã được thực hiện, ở đó có kể đến khe hở giữa vỏ động cơ và nền móng. Tiếp theo, phương trình động lực học của hệ đã được thiết lập bằng áp dụng phương pháp Lagrange, ta được một hệ phương trình vi phân phi tuyến. Việc tính toán dao động tuần hoàn và phân tích rẽ nhánh được thực hiện bằng phương pháp tính toán số, dựa trên thuật toán bắn đơn. Kết quả thu được là biểu đồ rẽ nhánh của dao động khi các tham số của hệ thay đổi và các dao động tuần hoàn tại một số trạng thái chuyển động của hệ.

Từ khóa: *Dao động phi tuyến, phương pháp bắn, mô phỏng số, tuyến tính từng khúc, ổn định Floquet.*

Abstract

In this paper, the periodic vibration calculation and branching analysis of the periodic root are presented for a motor model located on an elastic base. Firstly, the vibrated model on the elastic base was proposed which includes the clearance between the motor housing and the base. Next, the dynamic equation of the system has been established by applying Lagrange method and we obtained a system of nonlinear differential equations. All the calculation was performed by numerical method based on the single shot algorithm. The results acquired are the branching figures of vibration according to the changes in the system parameters and periodic vibrations at some steady state of the system.

Keywords: *Nonlinear vibration, shooting method, numerical simulation, piecewise -linear system, Floquet stability.*

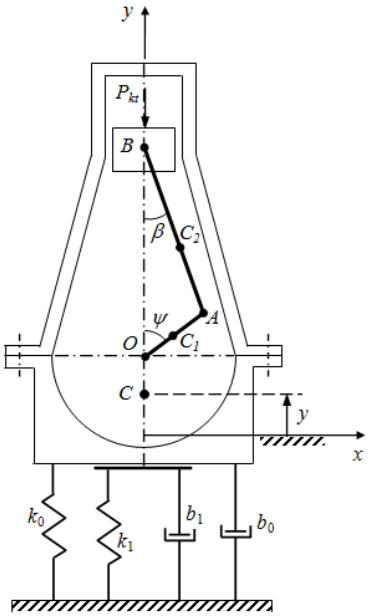
1. Mở đầu

Với các hệ dao động kỹ thuật, trong thực tế thường là các hệ thống phi tuyến. Đặc biệt với các máy và thiết bị, khi có kể đến các khe hở tại các chỗ tiếp xúc, sẽ cho ta một hệ dao động phi tuyến mạnh. Các hệ thống như vậy có các đáp ứng động lực học rất phức tạp, như sự rẽ nhánh trong dao động hay sự dao động hỗn độn [1]. Đã có nhiều công trình đã được công bố về tính toán dao động tuần hoàn và phân tích rẽ nhánh đối với các hệ có khe hở. Shaw và Holmes [7] đã tìm thấy chuyển động điều hòa, sóng đa hài và dao động hỗn độn của hệ dao động phi tuyến một bậc tự do, có xét đến lò xo phi tuyến. Natsiavas [8] đã trình bày động lực học của hệ dao động phi tuyến mạnh với giảm chấn kiểu van der Pol. Ponce và cộng sự [9] đã nghiên cứu sự nhân đôi chu kỳ của một lớp dao động tuyến tính từng khúc bằng phương pháp đại số. Bằng thực nghiệm, Wiercigroch et al. [10] đã đo dao động hỗn loạn của hệ dao động tuyến tính từng khúc. Kết quả thí nghiệm được so sánh với mô phỏng số. Casini và Vestroni [11] đã phân tích các đáp ứng của tuyến tính từng khúc 2 bậc tự do. Phân tích dao động phi tuyến mạnh của hệ thống bằng phương pháp IHB đã được trình bày trong một số bài báo [2-6]. Dựa trên phương pháp IHB, Xu et al. [5, 6] đã tính toán các nghiệm tuần hoàn của hệ dao động chịu kích động điều hòa, trong đó sự tuyến tính từng khúc của lò xo và cản nhớt đã được đề cập, phân tích sự nhân đôi chu kỳ và hỗn độn được thực hiện bằng thuật toán IHB.

Từ các phân tích ở trên, bài báo này tập trung vào tính toán và phân tích rẽ nhánh đối với dao động tuần hoàn của động cơ trên đệm đàn hồi, khi có kể đến khe hở giữa vỏ động cơ và giá đỡ bằng phương pháp tính toán số dựa trên thuật toán bắn đơn.

2. Thiết lập phương trình động lực học của động cơ trên đệm đàn hồi

Xét mô hình dao động của động cơ một piston - xi lanh đặt trên nền đàn hồi như Hình 1, trong đó vỏ máy được xem là vật rắn đồng chất, khối lượng m_0, dịch chuyển theo phương thẳng đứng. Giả thiết, vỏ máy được đặt trên các lò xo có độ cứng k_0, k_1 và các cản nhớt có độ cản b_0, b_1, ở đó liên kết của vỏ máy với lò



Hình 1. Mô hình dao động của động cơ

x_o k_0 và cản b_0 là liên tục còn liên kết của vỏ máy với lò x_o k_1 và cản b_1 là không liên tục, chúng như các điểm tựa. Khi lò xo k_0 chưa biến dạng hoặc chịu kéo thì lò xo k_1 không biến còn khi lò x_o k_0 chịu nén thì lò x_o k_1 cũng chịu nén. Động cơ được mô hình hóa bởi cơ cấu tay quay con trượt, gồm có, tay quay $OA = R$, khối lượng m_1, mô men quán tính đối với khối tâm C_1 là J_1, thanh truyền $AB = L$, khối lượng m_2, mô men quán tính đối với khối tâm C_2 là J_2, con trượt B khối lượng m_3 được xem như một chất điểm. Các khoảng cách $OC_1 = e_1$, $AC_2 = e_2$. Ta thấy hệ có 2 bậc tự do, ta chọn hệ tọa độ suy rộng đủ là $q_1 = y$ là lượng dịch chuyển của vỏ động cơ so với vị trí cân bằng tĩnh, $q_2 = \psi$ là góc quay của OA so với phương thẳng đứng. Khi đó, động năng, thế năng và hàm hao tán của hệ được xác định như sau:

* Động năng của cơ hệ:

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_{C_1}^2 + \dot{y}_{C_1}^2) + \frac{1}{2}J_1\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_{C_2}^2 + \dot{y}_{C_2}^2) + \frac{1}{2}J_2\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{y}_B^2 \quad (1)$$

Từ hình vẽ, ta có:

$$\begin{cases} x_{C_1} = e_1\sin\psi \\ y_{C_1} = y + OC + e_1\cos\psi \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_{C_2} = R\sin\psi - e_2\sin\beta \\ y_{C_2} = y + OC + R\cos\psi + e_2\cos\beta \end{cases} \quad (3)$$

$$y_B = y + OC + R\cos\psi + L\cos\beta \quad (4)$$

Thay (2), (3) và (4) vào (1), sau khi biến đổi, ta được:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_0\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(m_1e_1^2 + J_1)\dot{\psi}^2 - m_1e_1\dot{y}\dot{\psi}\sin\psi \\ &+ \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(J_2 + m_2e_2^2)\dot{\beta}^2 - m_2R\dot{y}\dot{\psi}\sin\psi \\ &- m_2e_2\dot{y}\dot{\beta}\sin\beta - m_2Re_2\dot{\psi}\dot{\beta}\cos\psi\cos\beta \\ &+ m_2Re_2\dot{\psi}\dot{\beta}\sin\psi\sin\beta + \frac{1}{2}m_3\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_3R^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi \\ &- \frac{1}{2}m_3 2R\dot{y}\dot{\psi}\sin\psi + \frac{1}{2}m_3L^2\dot{\beta}^2\sin^2\beta - \frac{1}{2}m_3 2L\dot{y}\dot{\beta}\sin\beta \\ &+ \frac{1}{2}m_3 2RL\dot{\psi}\dot{\beta}\sin\psi\sin\beta \end{aligned} \quad (5)$$

Mặt khác, với $\lambda = R/L$, cũng từ hình vẽ ta có:

$$\sin\beta = \lambda\sin\psi \quad (6)$$

Từ (6), ta suy ra được:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi} \quad (7)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\lambda\dot{\psi}\cos\psi}{\cos\beta} \quad (8)$$

Với $\lambda << 1$, áp dụng khai triển Taylor và bỏ qua các vô cùng bé bậc cao, ta được:

$$\cos\beta \approx 1 - \lambda^2\sin^2\psi/2 \quad (9)$$

$$\dot{\beta} \approx \lambda\dot{\psi}\cos\psi\left(1 + \lambda^2\sin^2\psi/2\right) \quad (10)$$

$$\dot{\beta}^2 \approx \lambda^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi + \lambda^4\dot{\psi}^2\cos^2\psi\sin^2\psi \quad (11)$$

Thay (6), (7), (9), (10) và (11) vào (5), sau khi thực hiện các phép biến đổi lượng giác, ta được:

$$\begin{aligned} T &= M\dot{y}^2/2 + (B_1\sin\psi + B_2\sin 2\psi \\ &+ B_4\sin 4\psi)\dot{y}\dot{\psi} + (J + A_1\cos\psi \\ &+ A_2\cos 2\psi - A_3\cos 3\psi - A_4\cos 4\psi \\ &+ A_5\cos 5\psi + A_6\cos 6\psi)\dot{\psi}^2/2 \end{aligned} \quad (12)$$

Trong đó:

$$M = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$$

$$\begin{aligned} J &= [J_1 + m_1e_1^2 + m_2R^2 + m_3R^2/2 + (J_2 + m_2e_2^2) \\ &(\lambda^2/2 + \lambda^4/8) - m_2Re_2(\lambda - \lambda^5/32) \\ &+ m_3L^2(\lambda^4/8 + \lambda^6/16)] \end{aligned}$$

$$A_1 = (m_2Re_2 + m_3RL)\left(\lambda^2/2 + \lambda^4/8\right)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= [(J_2 + m_2e_2^2)\lambda^2/2 - m_2Re_2(\lambda + \lambda^5/64) \\ &- (m_3R^2/2 + m_3L^2\lambda^6/32)] \end{aligned}$$

$$A_3 = -(m_2Re_2 - m_3RL)\left(\lambda^2/2 + 3\lambda^4/16\right)$$

TẠP CHÍ ISSN: 1859-316X
KHOA HỌC CÔNG NGHỆ HÀNG HẢI
JOURNAL OF MARINE SCIENCE AND TECHNOLOGY

$$A_4 = -[(J_2 + m_2 e_2^2)\lambda^4/8 + m_2 R e_2 \lambda^5/32 + m_3 L^2(\lambda^4/8 + \lambda^6/16)]$$

$$A_5 = (m_2 R e_2 + m_3 R L)\lambda^4/16$$

$$A_6 = (m_2 R e_2 \lambda^5/64 + m_3 L^2 \lambda^6/32)$$

$$B_1 = -(m_1 e_1 + m_2 R + m_3 R)$$

$$B_2 = -(m_2 e_2 + m_3 L)\left(\lambda^2/2 + \lambda^4/8\right)$$

$$B_4 = (m_2 e_2 + m_3 L)\lambda^4/16$$

* Thế năng của cơ hệ:

$$\Pi = \begin{cases} k_0(y-\Delta y)^2/2 + m_0 g y + m_1 g y_{C_1} \\ + m_2 g y_{C_2} + m_3 g y_B \quad \text{khi} \quad y \geq \Delta y \\ (k_0 + k_1)(y-\Delta y)^2/2 + m_0 g y + m_1 g y_{C_1} \\ + m_2 g y_{C_2} + m_3 g y_B \quad \text{khi} \quad y < \Delta y \end{cases} \tag{13}$$

Trong đó:

$$\Delta y = \frac{(m_0 + m_1 + m_2 + m_3)g}{k_0 + k_1} \tag{14}$$

* Hàm hao tán của cơ hệ:

$$\Phi = \begin{cases} b_0 \dot{y}^2/2 & \text{khi} \quad y \geq \Delta y \\ (b_0 + b_1)\dot{y}^2/2 & \text{khi} \quad y < \Delta y \end{cases} \tag{15}$$

* Các lực suy rộng của lực khí thể:

$$Q_y^* = 0; \quad Q_\psi^* = P_{kt}(R\sin\psi + L\lambda^2 \sin 2\psi/2) \tag{16}$$

Áp dụng phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^*; \quad i = 1,2 \tag{17}$$

Giả thiết ở trạng thái chuyển động bình ổn, trục động cơ quay đều với vận tốc góc Ω, khi đó ta thu được phương trình vi phân mô tả dao động của vỏ động cơ có dạng như sau:

$$M\ddot{y} + b_0\dot{y} + k_0 y + H(\dot{y}) + G(y) = -\Omega^2(B_1\cos\Omega t + 2B_2\cos 2\Omega t + 4B_4\cos 4\Omega t) \tag{18}$$

Trong đó:

$$G(y) = \begin{cases} k_1 \Delta y & \text{khi} \quad y \geq \Delta y \\ k_1 y & \text{khi} \quad y < \Delta y \end{cases} \tag{19}$$

$$H(\dot{y}) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad y \geq \Delta y \\ b_1 \dot{y} & \text{khi} \quad y < \Delta y \end{cases} \tag{20}$$

3. Tính toán dao động tuần hoàn và phân tích rẽ nhánh

Xét phương trình vi phân (18), bằng cách đặt:

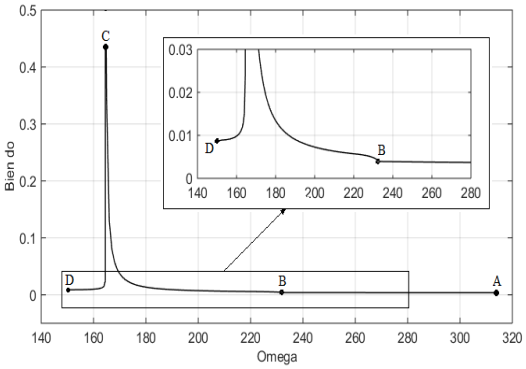
$$y_1 = y, \; y_2 = \dot{y}$$

Ta đưa (18) về hệ phương trình vi phân thường có dạng như sau:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -(1/M)[b_0\dot{y} + k_0 y + H(y_2) + G(y_1) \\ + \Omega^2(B_1\cos\Omega t + 2B_2\cos 2\Omega t + 4B_4\cos 4\Omega t)] \end{cases} \tag{21}$$

Dựa trên hệ phương trình (21), ta đi thiết lập chương trình tính toán số để tính toán dao động tuần hoàn và khảo sát rẽ nhánh của dao động đối với vỏ máy động cơ. Việc tính toán dao động tuần hoàn của các hệ phi tuyến được thực hiện dựa trên thuật toán bắn đơn [1], còn việc phân tích rẽ nhánh được thực hiện dựa trên lý thuyết rẽ nhánh của nghiệm tuần hoàn [1]. Để phân tích rẽ nhánh, ta chọn tốc độ quay Ω của động cơ làm tham số rẽ nhánh, còn các tham số khác được xác định dựa trên một thiết bị trong phòng thí nghiệm, có các giá trị như sau: m_0 = 50(kg), m_1 = 3,2(kg), m_2 = 1,0(kg), m_3 = 0,5(kg), R = 0,046(m), L = 0,17235(m), e_1 = 0,0346(m), e_2 = 0,047(m), k_1 = 7,0*10^5(N/m), k_0 = 2.0*10^5(N/m), b_0 = 0,75(N.s/m), b_1 = 5,0 (N.s/m).

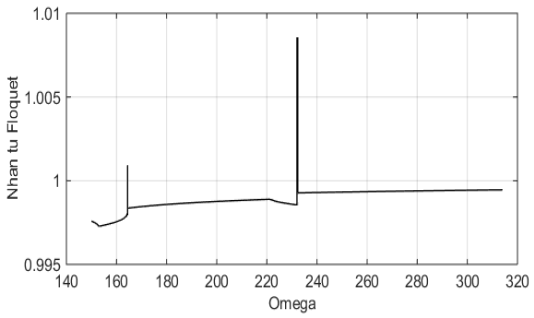
Với các số liệu được cho như trên, cho Ω biến thiên trong khoảng [150(rad/s); 314(rad/s)], sau khi tính toán, ta được một số kết quả được cho trên các Hình 2 đến Hình 7.



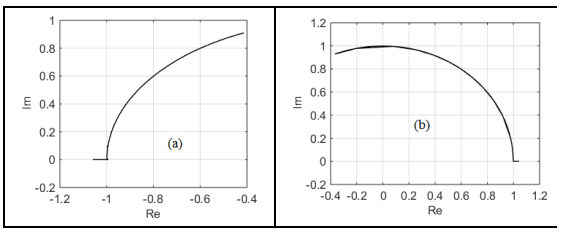
Hình 2. Biểu đồ rẽ nhánh

Từ biểu đồ rẽ nhánh trên Hình 2, ta thấy, với Ω =314(*rad/s*) ứng với điểm *A*, ta tìm được một nghiệm tuần hoàn có chu kỳ $2\pi/\Omega$ ổn định, nghiệm này được gọi là nghiệm 1 - chu kỳ, hình ảnh của nghiệm 1 - chu kỳ tại Ω = 280(*rad/s*), được cho trên Hình 5. Cho Ω

giảm dần nghiệm 1 - chu kỳ này vẫn tồn tại và ổn định cho đến khi $\Omega = 232(rad/s)$, ứng với điểm *B* trên Hình 2, tại đây có nhân tử Floquet nằm trên vòng tròn đơn vị và có xu hướng dời vòng tròn đơn vị theo hướng - 1 khi Ω tiếp tục giảm xuống (xem Hình 3 và Hình 4a), nên theo lý thuyết rẽ nhánh của nghiệm tuần hoàn [1], tại đó, sẽ xuất hiện rẽ nhánh nhân đôi chu kỳ (**period - doubling**), có nghĩa là khi Ω giảm qua giá trị này, nghiệm 1- chu kỳ sẽ mất ổn định và xuất hiện nghiệm có chu kỳ $4\pi/\Omega$ ổn định, nghiệm này được gọi là nghiệm 2 - chu kỳ, hình ảnh về nghiệm 2 - chu kỳ tại $\Omega = 220(rad/s)$, được cho trên Hình 6. Tiếp tục cho Ω giảm xuống, nghiệm 2 - chu kỳ này vẫn ổn định, cho đến khi $\Omega = 164{,}5(rad/s)$, ứng với điểm *C* trên Hình 2, tại đây có nhân tử Floquet nằm trên vòng tròn đơn vị và có xu hướng dời vòng tròn đơn theo hướng +1 khi Ω tiếp tục giảm xuống (xem Hình 3 và Hình 4b), theo lý thuyết rẽ nhánh, tại đó sẽ xuất hiện rẽ nhánh chuyển qua giới hạn (**transcritical**), có nghĩa là khi Ω giảm qua điểm rẽ nhánh này, nghiệm 2 - chu kỳ này sẽ mất ổn định và dao động của hệ sẽ nhảy đến một nghiệm 2 - chu kỳ mới ổn định, hình ảnh về nghiệm 2 - chu kỳ mới này được cho trên Hình 7 và nghiệm 2 - chu kỳ mới này ổn định cho đến khi $\Omega = 150(rad/s)$.



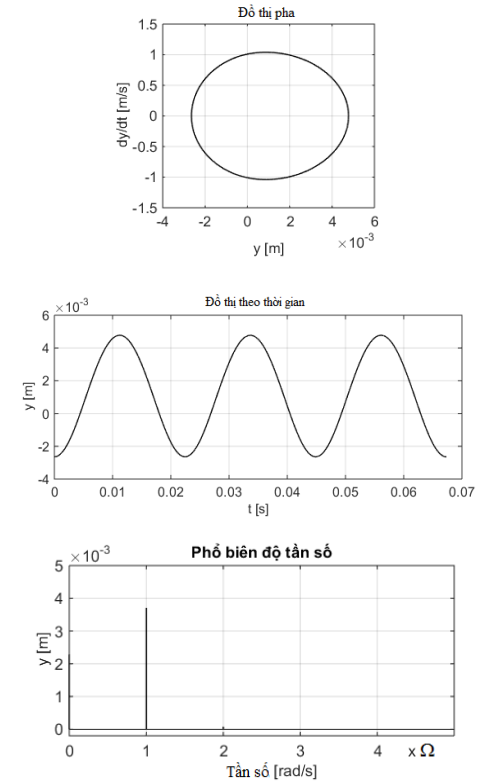
Hình 3. Biểu đồ nhân tử Floquet



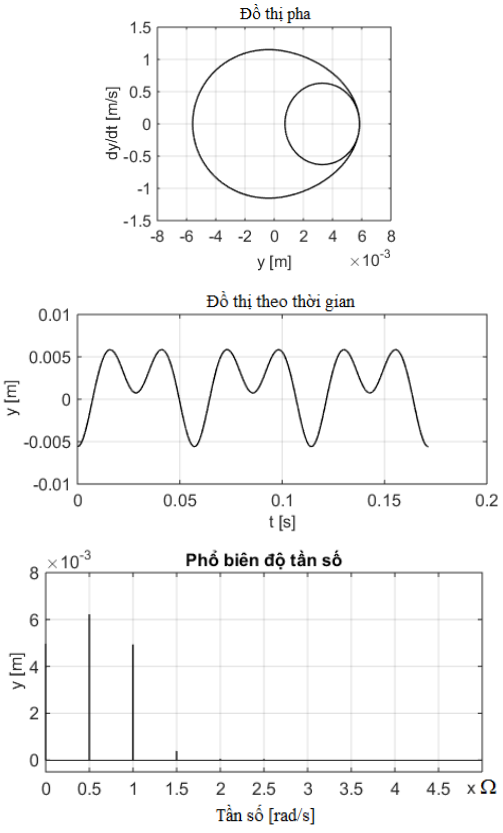
Hình 4. Biểu đồ nhân tử Floquet trên mặt phẳng phức

(a) Ứng với $\Omega = [232; 314]$;

(b) Ứng với $\Omega = [165; 232]$.

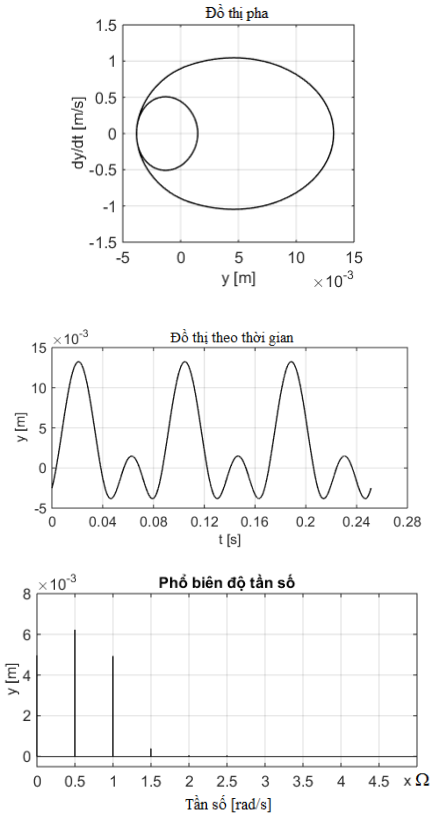


Hình 5. Nghiệm 1 - chu kỳ tại $\Omega = 280(rad/s)$



Hình 6. Nghiệm 2 - chu kỳ tại $\Omega = 220(rad/s)$

TẠP CHÍ ISSN: 1859-316X
KHOA HỌC CÔNG NGHỆ HÀNG HẢI
JOURNAL OF MARINE SCIENCE AND TECHNOLOGY



Hình 7. Nghiệm 2 - chu kỳ tại Ω = 150(rad/s)

5. Kết luận

Bài báo này đã áp dụng phương pháp bắn đơn trong tính toán dao động tuần hoàn của các hệ dao động phi tuyến mạnh. Áp dụng phương pháp đưa, tìm nghiệm tuần hoàn và khảo sát rẽ nhánh đối với động cơ đặt trên nền đàn hồi, với độ cứng và độ cản tuyến tính từng khúc. Từ các kết quả có được ta thấy, trong hệ khảo sát đã xuất hiện điểm rẽ nhánh nhân đôi chu kỳ và điểm rẽ nhánh chuyển qua giới hạn. Khi qua điểm rẽ nhánh nhân đôi chu kỳ, thì chu kỳ của dao động của hệ sẽ được nhân đôi, còn khi đi qua điểm rẽ nhánh chuyển qua giới hạn, dao động của hệ sẽ có bước nhảy sang nghiệm tuần hoàn mới, có đặc điểm khác với nghiệm ban đầu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nayfeh A. H., Balachandran B., *Applied Nonlinear Dynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[2] C. W. Wong, W. S. Zhang, S. L. Lau, *Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method*, Journal of Sound and Vibration, Vol.149, No.1, pp.91-105, 1991.

[3] S. L. Lau and W. S. Zhang, *Nonlinear vibrations of piecewise linear systems by incremental harmonic balance method*, Journal of Applied Mechanics, Vol.59, No.1, pp.153-160, 1992.

[4] Raghothama A., Narayaman S., *Bifurcation and chaos of an articulated loading platform with piecewise non - linear stiffness using the incremental harmonic balance method*, Ocean Engineering, Vol.27, pp.1087-1107, 2000.

[5] Xu L., Lu M. W., Cao Q., *Nonlinear vibrations of dynamical systems with a general form of piecewise - linear viscous damping by incremental harmonic balance method*, Physics Letters A , Vol.301, pp.65-73, 2002.

[6] Xu L., Lu M. W., Cao Q., *Bifurcation and chaos of harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method*, Journal of Sound and Vibration, Vol.264, pp.873-882, 2003.

[7] S. W. Shaw and P. J. Holmes, *A periodically forced piecewise linear oscillator*, Journal of Sound and Vibration, Vol.90 (1), pp.129-155, 1983.

[8] S. Natsiavas, *Dynamics of piecewise linear oscillators with Van Der Pol type damping*, International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol.26. No.314. pp.349-366, 1991.

[9] E. Ponce, J. Ros, E. Vela, *Algebraically computable piecewise linear nodal oscillators*, Applied Mathematics and Computation 219, pp.4194-4207, 2013.

[10] M. Wiercigroch and V. W. T. Sin, *Measurement of chaotic vibration in a symmetrically piecewise linear oscillator*, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 9, No.1&2, pp.209-220, 1998.

[11] P. Casini and F. Vestroni, *Characterization of bifurcating non-linear normal modes in piecewise linear mechanical systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.46, No.1, pp.142-150, 2011.

Ngày nhận bài:	29/6/2021
Ngày nhận bản sửa:	17/8/2021
Ngày duyệt đăng:	21/8/2021