

# ĐIỀU KHIỂN TRƯỢT BẬC PHÂN SỐ THỜI GIAN CỐ ĐỊNH CHO ROBOT ĐA HƯỚNG TRONG HỆ THỐNG KHO LOGISTICS

## FIXED-TIME FRACTIONAL-ORDER SLIDING MODE CONTROL FOR AN OMNIDIRECTIONAL MOBILE ROBOT IN WAREHOUSE LOGISTICS TRANSPORTATION

HOÀNG QUỐC ĐÔNG<sup>1\*</sup>, NGUYỄN LAN HƯƠNG<sup>1\*</sup>, PHẠM TÂM THÀNH<sup>2</sup>,  
LÂM HỒNG NGỌC<sup>1</sup>, NGUYỄN TRÍ DŨNG<sup>1</sup>, PHẠM MINH HOÀNG<sup>1</sup>,  
NGUYỄN VIỆT HOÀN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Viện Cơ khí, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

<sup>2</sup>Phòng Khoa học - Công nghệ, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

\*Email liên hệ: donghqvck@vimaru.edu.vn, huongnlvck@vimaru.edu.vn

DOI: <https://doi.org/10.65154/jmst.1090>

### Tóm tắt

Robot di động đa hướng là một giải pháp tiềm năng cho các hệ thống kho logistics nhờ tính cơ động cao và khả năng di chuyển linh hoạt trong không gian hẹp. Đặc biệt, robot omni ba bánh có thể chuyển động theo nhiều hướng mà không cần thay đổi hướng thân, do đó rất phù hợp với các nhiệm vụ vận chuyển hàng hóa trong kho. Tuy nhiên, bài toán điều khiển chính xác đối với loại robot này vẫn còn nhiều thách thức, do chuyển động tổng thể của hệ phụ thuộc chặt chẽ vào sự phối hợp vận tốc giữa các bánh xe. Sai lệch nhỏ tại từng bánh xe có thể tích lũy theo thời gian, từ đó làm suy giảm độ chính xác bám quỹ đạo và làm tăng nguy cơ va chạm trong quá trình vận hành. Để khắc phục vấn đề này, bài báo đề xuất một bộ điều khiển trượt bậc phân số hội tụ thời gian cố định cho robot di động đa hướng nhằm nâng cao chất lượng bám quỹ đạo dưới tác động của nhiễu ngoài. Tính ổn định của hệ kín được chứng minh, đồng thời bảo đảm đặc tính hội tụ trong thời gian cố định dưới tác động của nhiễu ngoài. Hiệu quả của phương pháp được kiểm chứng thông qua mô phỏng số và so sánh với bộ điều khiển trượt cổ điển, bộ điều khiển backstepping thời gian hữu hạn, và bộ điều khiển tỉ lệ-tích phân-vi phân truyền thống.

**Từ khóa:** Bánh xe omni, robot di động đa hướng, điều khiển trượt, hội tụ thời gian cố định, điều khiển trượt bậc phân số.

### Abstract

Omnidirectional mobile robots are a promising solution for warehouse logistics systems owing to their high maneuverability and flexible motion in

confined spaces. In particular, three-wheeled omni robots can move in multiple directions without changing their body orientation, making them well suited for material transportation tasks in warehouse environments. However, achieving precise control of such robots remains challenging, since the overall motion of the system depends critically on the coordinated velocity regulation of the individual wheels. Small velocity deviations at each wheel may accumulate over time, thereby degrading trajectory-tracking accuracy and increasing the risk of collision during operation. To address this issue, this paper proposes a fixed-time fractional-order sliding mode controller for an omnidirectional mobile robot to enhance trajectory-tracking performance in the presence of external disturbances. Closed-loop stability is rigorously established, while guaranteeing fixed-time convergence in the presence of external disturbances. The effectiveness of the proposed method is validated through numerical simulations and comparative studies against a conventional sliding mode controller, a finite-time backstepping controller, and a traditional proportional-integral-derivative controller, thereby demonstrating clear improvements in trajectory-tracking accuracy, convergence speed, and disturbance rejection performance.

**Keywords:** Omni wheel, omnidirectional robot, sliding mode control, fixed-time convergence, fractional-order sliding mode control.

## 1. Mở đầu

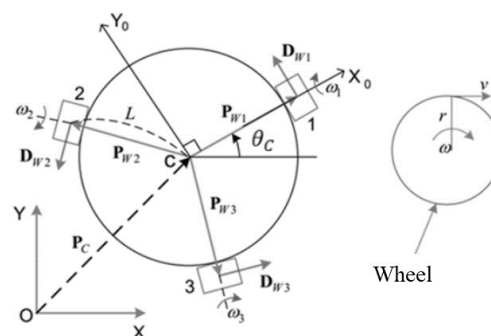
Robot di động đa hướng đã và đang thu hút nhiều sự quan tâm trong các hệ thống logistics hiện đại nhờ khả năng cơ động vượt trội và tính linh hoạt cao trong không gian chật hẹp. Đặc biệt, cấu trúc robot omni ba bánh cho phép chuyển động đa hướng mà không cần thay đổi hướng thân [1, 2], qua đó nâng cao hiệu quả vận hành trong các bài toán vận chuyển và điều phối hàng hóa trong kho thông minh. Nhiều nghiên cứu đã tập trung vào mô hình hóa và điều khiển loại robot này [3,4], trong đó các phương pháp điều khiển tuyến tính và phi tuyến cơ bản, như PID [5] hoặc điều khiển phản hồi trạng thái [6], đã được áp dụng rộng rãi nhờ tính đơn giản và dễ triển khai. Tuy nhiên, các phương pháp này thường bộc lộ hạn chế về độ bền vững khi hệ chịu tác động của nhiễu ngoài và bất định mô hình.

Để nâng cao chất lượng điều khiển, các phương pháp điều khiển phi tuyến hiện đại, đặc biệt là điều khiển trượt (sliding mode control, SMC) [7], đã được nghiên cứu rộng rãi nhờ khả năng chống nhiễu tốt và tính bền vững cao [8]. Tuy nhiên, SMC cổ điển thường chỉ bảo đảm tính hội tụ tiệm cận, do đó chất lượng quá độ và tốc độ hội tụ vẫn còn hạn chế đối với các yêu cầu vận hành cần độ chính xác và tính đáp ứng nhanh. Bên cạnh đó, một số nghiên cứu đã đề xuất phương pháp điều khiển backstepping đầu cuối nhanh bền vững cho robot omni ba bánh và cho thấy hiệu quả bám quỹ đạo tốt cùng tốc độ hội tụ sai số nhanh trong điều kiện danh định [9, 10]. Mặc dù vậy, ảnh hưởng của nhiễu ngoài và bất định tổng hợp tác động lên hệ vẫn chưa được phân tích một cách tường minh và chặt chẽ. Hơn nữa, các nghiên cứu này mới chỉ bảo đảm được tính hội tụ trong thời gian hữu hạn của bộ điều khiển, trong khi đặc tính hội tụ thời gian cố định vẫn chưa đạt được [11, 12], tức là thời gian hội tụ chưa được chặn trên bởi một hằng số độc lập với điều kiện ban đầu. Đây là một hướng nghiên cứu hiệu quả để nâng cao chất lượng điều khiển cho robot di động đa hướng trong môi trường logistics, nơi hệ điều khiển không chỉ cần đạt độ chính xác bám quỹ đạo cao mà còn phải có khả năng phục hồi nhanh sau nhiễu.

Từ những phân tích trên, bài báo này đề xuất một bộ điều khiển trượt bậc phân số [13] hội tụ thời gian cố định cho robot di động đa hướng nhằm nâng cao chất lượng bám quỹ đạo trong điều kiện hệ chịu tác động của nhiễu. Bộ điều khiển được thiết kế trên cơ sở mô hình động học và động lực học của hệ. Mặt khác, tính ổn định của hệ kín được chứng minh chặt chẽ theo tiêu chuẩn ổn định Lyapunov và Mittag-Leffler, qua đó bảo đảm đặc tính hội tụ trong thời gian cố định trong trường hợp nhiễu bị chặn. Hiệu quả của phương

pháp đề xuất được kiểm chứng thông qua mô phỏng số và so sánh với bộ điều khiển trượt cổ điển, bộ điều khiển backstepping thời gian hữu hạn, và điều khiển PID. Qua đó đánh giá và làm rõ những ưu điểm vượt trội của phương pháp đề xuất.

## 2. Mô hình động lực học robot



**Hình 1. Robot ba bánh omni**

Hình 1 trình bày các đặc trưng động học của robot bánh đa hướng (omni) (TOWR). Trong đó, ba bánh omni có trục quay vuông góc với trục động cơ. Các trục quay này được sắp xếp lệch nhau một góc là  $120^\circ$  quanh thân robot. Các bánh có bán kính  $r$  được dẫn động bởi các động cơ điện một chiều (DC motor). Tâm của robot di động đa hướng (OMR) được ký hiệu  $C$  cách tâm mỗi bánh xe một khoảng  $L$ . Gọi  $OXY$  là hệ trục tọa độ toàn cục và  $CX_0Y_0$  được định nghĩa là hệ trục tọa độ tham chiếu cục bộ gắn với TOWR. Vị trí của robot trong hệ trục tọa độ tổng thể được xác định thông qua các đại lượng  $X, Y$  và  $\Phi_c$ . Mặt khác, tư thế của robot được mô tả bởi vector  $\chi_c = [x_c, y_c, \theta_c]^T \in R^{3 \times 1}$ . Trong đó  $x_c$  và  $y_c$  là tọa độ vị trí của tâm robot và  $\theta_c$  là góc định hướng của thân robot so với hệ tọa độ toàn cục.

Gọi  $\omega_R = [\omega_i]^T, i = (1, 2, 3)$  là vector vận tốc góc của ba bánh xe,  $\dot{\chi}_c = [\dot{x}_c \ \dot{y}_c \ \dot{\theta}_c]^T$  là vector vận tốc của robot. Khi đó, quan hệ động học giữa vận tốc thân robot và vận tốc góc của các bánh xe được thiết lập dưới dạng:

$$\omega_R = \frac{1}{r} J_k \dot{\chi}_c, \quad (1)$$

hay tương đương:

$$\dot{\chi}_c = r \mathbf{H}_i \boldsymbol{\omega}_R, \quad (2)$$

Trong đó  $\mathbf{J}_k \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  là ma trận động học thuận và

$\mathbf{H}_i = \mathbf{J}_k^{-1}$  là ma trận động học ngược. Với cấu hình ba bánh omni đối xứng, ta có:

$$J_{k11} = -\sin(\theta_c), \quad J_{k12} = \cos(\theta_c), \quad \text{và}$$

$$J_{k13} = J_{k23} = J_{k33} = L, \quad J_{k21} = -\sin(\pi/3 - \theta_c),$$

$$J_{k22} = -\cos(\pi/3 - \theta_c), \quad J_{k31} = \sin(\pi/3 + \theta_c), \text{ and}$$

$$J_{k32} = -\cos(\pi/3 + \theta_c).$$

Mô hình động học trên cho thấy vận tốc tịnh tiến và quay của robot được xác định trực tiếp từ tổ hợp vận tốc góc của bánh xe, phản ánh đúng đặc trưng khả năng đa hướng của nền tảng robot omni.

Dựa trên tài liệu tham khảo [9], từ quan hệ cân bằng lực tịnh tiến và mômen quay tác dụng lên thân robot, mô hình động lực học được xây dựng dưới dạng:

$$\mathbf{F}_m \ddot{\chi}_c = \alpha \mathbf{P}(\theta) \mathbf{U} - \frac{3\beta}{2} \mathbf{D} \dot{\chi}_c + \delta_d, \quad (3)$$

trong đó  $\mathbf{F}_m = \text{diag}(m, m, J)$ ,  $\mathbf{D} = \text{diag}(1, 1, 2L^2)$ ,

$\mathbf{U} = [U_1(t) \ U_2(t) \ U_3(t)]^T$ . Ma trận  $\mathbf{P}(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  có các phần tử được xác định bởi:

$$P_{11} = -\sin \theta, \quad P_{12} = -\sin(\pi/3 - \theta),$$

$$P_{13} = \sin(\pi/3 + \theta), \quad P_{21} = \cos \theta,$$

$$P_{22} = -\cos(\pi/3 - \theta), \quad P_{23} = -\cos(\pi/3 + \theta),$$

$P_{31} = P_{32} = P_{33} = L$ . Ở đây,  $\delta_d(t)$  là hàm nhiễu tác động lên hệ thống thỏa mãn điều kiện bị chặn,  $|\delta_d| \leq \hat{\delta}_d \in \mathbb{R}^3$ ,  $\hat{\delta}_d > 0$ .  $m$  và  $J$  là khối lượng robot và mô-men quán tính quanh tâm  $C$ .

### 3. Thiết kế bộ điều khiển

Trước khi tiến hành thiết kế bộ điều khiển, một số định nghĩa về đạo hàm cấp phân số được trình bày như sau:

**Định nghĩa 1.** [14]: Đạo hàm cấp phân số bậc  $\alpha$  của hàm  $g(t)$  được xác định theo hai cách tiếp cận

Riemann-Liouville và Caputo như sau:

$$D_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} g(\tau) d\tau, \quad (4)$$

và

$${}^C D_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} g^{(m)}(\tau) d\tau, \quad (5)$$

Trong đó  $\alpha \in [m-1, m]$  và  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

**Định nghĩa 2.** [14]: Tích phân bậc phân số  $\alpha$  của hàm  $g(t)$  được xác định như sau:

$$I_{0,t}^\alpha g(t) = D_t^{-\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad (6)$$

Trong đó  $\Gamma(\bullet)$  là hàm Gamma, được xác định bởi:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (7)$$

với  $z \in \mathbb{C}$  và  $\text{Re } z > 0$ .

Bằng cách đặt biến trạng thái  $\mathbf{q} = \chi_c$ , mô hình động lực học của robot được viết dưới dạng:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{3\beta}{2} \mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \alpha \mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{P}(\theta) \mathbf{U} + \mathbf{F}_m^{-1} \delta_d. \quad (8)$$

Để thiết kế bộ điều khiển, vector sai số bám quỹ đạo được định nghĩa như sau:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_T, \quad (9)$$

Trong đó  $\mathbf{q}_T$  là vector quỹ đạo tham chiếu của robot. Từ đó, các vector vận tốc tham chiếu và gia tốc tham chiếu được ký hiệu là:  $\dot{\mathbf{q}}_T$  và  $\ddot{\mathbf{q}}_T$ . Trên cơ sở đó, vector sai số bám vận tốc và gia tốc được định nghĩa bởi:  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_T$  và  $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_T$ .

Nhằm đồng thời khai thác ưu điểm của đạo hàm cấp phân số trong cải thiện chất lượng bám quỹ đạo và đảm bảo thời gian hội tụ là cố định, hàm mất trượt

được đề xuất như sau:

$$\sigma_s = \ddot{\mathbf{q}} + \lambda_a {}^C D_t^\mu \ddot{\mathbf{q}} + \lambda_b \text{sig}^{\eta_1}(\ddot{\mathbf{q}}) + \lambda_c \text{sig}^{\eta_2}(\ddot{\mathbf{q}}), \quad (10)$$

Trong đó các tham số  $\mu$ ,  $\eta_1$  và  $\eta_2$  thỏa mãn điều kiện  $0 < \mu < 2$ ,  $0 < \eta_1 < 1$ , và  $1 < \eta_2 < 2$ . Các ma trận đường chéo  $\lambda_a = \text{diag}(\lambda_{a1}, \lambda_{a2}, \lambda_{a3})$ ,  $\lambda_b = \text{diag}(\lambda_{b1}, \lambda_{b2}, \lambda_{b3})$  và  $\lambda_c = \text{diag}(\lambda_{c1}, \lambda_{c2}, \lambda_{c3})$  thỏa mãn điều kiện xác định dương. Các toán tử phi tuyến  $\text{sig}^{\eta_1}(\ddot{\mathbf{q}})$  và  $\text{sig}^{\eta_2}(\ddot{\mathbf{q}})$  được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \text{sig}^{\eta_1}(\ddot{\mathbf{q}}) &= \left[ |\ddot{q}_1|^{\eta_1} \text{sgn}(\ddot{q}_1), |\ddot{q}_2|^{\eta_1} \text{sgn}(\ddot{q}_2), |\ddot{q}_3|^{\eta_1} \text{sgn}(\ddot{q}_3) \right]^T, \\ \text{sig}^{\eta_2}(\ddot{\mathbf{q}}) &= \left[ |\ddot{q}_1|^{\eta_2} \text{sgn}(\ddot{q}_1), |\ddot{q}_2|^{\eta_2} \text{sgn}(\ddot{q}_2), |\ddot{q}_3|^{\eta_2} \text{sgn}(\ddot{q}_3) \right]^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Bằng cách định nghĩa các vector

$$\begin{aligned} \Pi_{\eta_1}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_1) &= \text{diag}(\eta_1 |\ddot{q}_1|^{\eta_1-1}, \eta_1 |\ddot{q}_2|^{\eta_1-1}, \eta_1 |\ddot{q}_3|^{\eta_1-1}), \\ \Pi_{\eta_2}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_2) &= \text{diag}(\eta_2 |\ddot{q}_1|^{\eta_2-1}, \eta_2 |\ddot{q}_2|^{\eta_2-1}, \eta_2 |\ddot{q}_3|^{\eta_2-1}), \end{aligned}$$

đạo hàm bậc nhất theo thời gian của hàm mặt trượt (10) được xác định bởi:

$$\dot{\sigma}_s = \ddot{\mathbf{q}} + \lambda_a {}^C D_t^{\mu+1} \ddot{\mathbf{q}} + \lambda_b \Pi_{\eta_1}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_1) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \lambda_c \Pi_{\eta_2}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_2) \dot{\ddot{\mathbf{q}}}. \quad (12)$$

Dựa trên cơ sở tính toán trên, vector tín hiệu điều khiển cho robot được thiết kế như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= -\alpha^{-1} \mathbf{P}^{-1}(\theta) \mathbf{F}_m \Gamma_a \text{sig}^{\gamma_1}(\sigma_s) + \alpha \frac{3\beta^{-1}}{2} \mathbf{P}^{-1}(\theta) \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \alpha^{-1} \mathbf{P}^{-1}(\theta) \left[ \mathbf{F}_m \Gamma_b \text{sig}^{\gamma_2}(\sigma_s) + \Gamma_c \text{sgn}(\sigma_s) \right] + \\ &\quad \alpha^{-1} \mathbf{P}^{-1}(\theta) \mathbf{F}_m \begin{bmatrix} -\ddot{\mathbf{q}}_T + \lambda_a {}^C D_t^{\mu+1} \ddot{\mathbf{q}} + \lambda_b \Pi_{\eta_1}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_1) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} \\ + \lambda_c \Pi_{\eta_2}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_2) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

Trong đó: Các ma trận đường chéo  $\Gamma_a = \text{diag}(\Gamma_{a1}, \Gamma_{a2}, \Gamma_{a3})$ ,  $\Gamma_b = \text{diag}(\Gamma_{b1}, \Gamma_{b2}, \Gamma_{b3})$ ,  $\Gamma_c = \text{diag}(\Gamma_{c1}, \Gamma_{c2}, \Gamma_{c3})$  có các hệ số được lựa chọn thỏa mãn điều kiện các ma trận là xác định dương. Số mũ phi tuyến  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$  được lựa chọn thỏa mãn điều kiện  $0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2 < 2$ .

Để phân tích tính ổn định của hệ thống, hàm Lyapunov được lựa chọn như sau:

$$V = \frac{1}{2} \sigma_s^T \sigma_s. \quad (14)$$

Khi đó, đạo hàm bậc nhất theo thời gian của hàm này được tính toán như sau:

$$\dot{V} = \sigma_s^T \dot{\sigma}_s. \quad (15)$$

Mặt khác, từ mô hình động lực học hệ thống, ta có:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{3\beta}{2} \mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \alpha \mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{P}(\theta) \mathbf{U} + \mathbf{F}_m^{-1} \delta_d - \ddot{\mathbf{q}}_T. \quad (16)$$

Trên cơ sở đó, thay thế luật điều khiển (13) vào hàm  $\dot{V}(t)$ , ta có:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma_s^T \left[ -\frac{3\beta}{2} \mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \lambda_c \Pi_{\eta_2}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_2) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \begin{aligned} &-\Gamma_a \text{sig}^{\gamma_1}(\sigma_s) - \Gamma_b \text{sig}^{\gamma_2}(\sigma_s) - \Gamma_c \text{sgn}(\sigma_s) \\ &+ \left[ -\frac{3\beta}{2} \mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_T + \lambda_a {}^C D_t^{\mu+1} \ddot{\mathbf{q}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_b \Pi_{\eta_1}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_1) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \lambda_c \Pi_{\eta_2}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_2) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{F}_m^{-1} \delta_d - \ddot{\mathbf{q}}_T + \lambda_a {}^C D_t^{\mu+1} \ddot{\mathbf{q}} + \lambda_b \Pi_{\eta_1}(\ddot{\mathbf{q}}, \eta_1) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} \right] \\ &= -\sigma_s^T \Gamma_a \text{sig}^{\gamma_1}(\sigma_s) - \sigma_s^T \Gamma_b \text{sig}^{\gamma_2}(\sigma_s) \\ &\quad - \sigma_s^T \Gamma_c \text{sgn}(\sigma_s) + \sigma_s^T \mathbf{F}_m^{-1} \delta_d. \end{aligned} \right.$$

Khi các ma trận và hệ số  $\Gamma_a$ ,  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_c$ ,  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$  thỏa mãn các điều kiện tiên quyết trong phần định nghĩa, ta có:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(\Gamma_a) \sum_{i=1}^3 |\sigma_{si}|^{\gamma_1+1} - \lambda_{\min}(\Gamma_b) \sum_{i=1}^3 |\sigma_{si}|^{\gamma_2+1} \\ &\quad - \lambda_{\min}(\Gamma_c) \|\sigma_s\|_1 + \|\sigma_s\| \|\mathbf{F}_m^{-1}\| \|\delta_d\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Bất đẳng thức trên được xây dựng dựa trên những phân tích sau:

$$\sigma_s^T \Gamma_a \text{sig}^{\gamma_1}(\sigma_s) \geq \lambda_{\min}(\Gamma_a) \sum_{i=1}^3 |\sigma_{si}|^{\gamma_1+1},$$

$$\sigma_s^T \Gamma_b \text{sig}^{\gamma_2}(\sigma_s) \geq \lambda_{\min}(\Gamma_b) \sum_{i=1}^3 |\sigma_{si}|^{\gamma_2+1},$$

$$\sigma_s^T \Gamma_c \text{sgn}(\sigma_s) \geq \lambda_{\min}(\Gamma_c) \|\sigma_s\|_1,$$

$$\begin{aligned}\sigma_s^T F_m^{-1} \delta_d &\leq \|\sigma_s\| \|F_m^{-1} \delta_d\| \\ &\leq \|\sigma_s\| \|F_m^{-1}\| \|\delta_d\| \leq \|\sigma_s\| \|F_m^{-1}\| \bar{\delta}_D.\end{aligned}$$

Ở đây,  $\bar{\delta}_D$  là cận trên của chuẩn Euclid của vector

$$\delta_d, \|\delta_d\| \leq \bar{\delta}_D.$$

Bằng việc lựa chọn các thông số của ma trận  $\Gamma_c$

thỏa mãn điều kiện  $\lambda_{\min}(\Gamma_c) > \|F_m^{-1}\| \bar{\delta}_D$ , ta có:

$$-\sigma_s^T \Gamma_c \operatorname{sgn}(\sigma_s) + \sigma_s^T F_m^{-1} \delta_d \leq -\varpi \|\sigma_s\|, \varpi > 0 \quad (18)$$

Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(\Gamma_a) \sum_{i=1}^3 |\sigma_{si}|^{\gamma_i+1} \\ &\quad -\lambda_{\min}(\Gamma_b) \sum_{i=1}^3 |\sigma_{si}|^{\gamma_i+1} - \varpi \|\sigma_s\|,\end{aligned} \quad (19)$$

Cuối cùng, đạo hàm theo thời gian của hàm Lyapunov thỏa mãn:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(\Gamma_a) c_{a1} 2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} V^{\frac{\gamma_1+1}{2}} \\ &\quad -\lambda_{\min}(\Gamma_b) c_{a2} 2^{\frac{\gamma_2+1}{2}} V^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - \varpi \sqrt{2} V^{\frac{1}{2}} \\ &\leq -c_{b1} V^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - c_{b2} V^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - c_{b3} V^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \quad (20)$$

Những tính toán trên dựa trên kết quả phân tích

các bất đẳng thức:  $\sum_{i=1}^3 |\sigma_{si}|^{\gamma_i+1} \geq c_{a1} \|\sigma_s\|^{\gamma_1+1}$  và

$$\sum_{i=1}^3 |\sigma_{si}|^{\gamma_i+1} \geq c_{a2} \|\sigma_s\|^{\gamma_2+1}. \text{ Trong đó,}$$

$$c_{a1} = 3^{1-\frac{\gamma_1+1}{2}}, c_{a2} = 3^{1-\frac{\gamma_2+1}{2}}, c_{b1} = \lambda_{\min}(\Gamma_a) c_{a1} \quad \text{và}$$

$$c_{b2} = \lambda_{\min}(\Gamma_b) c_{a2}. \text{ Đặt } c_{c1} = \frac{\gamma_1+1}{2} \text{ và } c_{c2} = \frac{\gamma_2+1}{2},$$

dựa trên những phân tích từ bỏ đề ổn định thời gian cố định tiêu chuẩn [15], có thể kết luận được biến mất trượt  $\sigma_s$  sẽ hội tụ về gốc trong một khoảng thời gian hữu hạn bị chặn trên bởi một hằng số, được xác định bởi:

$$T \leq \frac{1}{c_{b1}(1-c_{c1})} + \frac{1}{c_{b2}(1-c_{c2})}. \quad (21)$$

Như vậy, biến mất trượt  $\sigma_s$  đạt hội tụ thời gian

cố định, đồng thời sai số bám được hội tụ về 0. Đặc tính này được đảm bảo trong điều kiện hệ chịu ảnh hưởng của nhiễu thỏa mãn điều kiện bị chặn

$$|\delta_d| \leq \bar{\delta}_D.$$

#### 4. Kết quả mô phỏng số

Các mô phỏng số được thực hiện bằng việc cho robot di chuyển bám theo một quỹ đạo hình tròn cho trước, trong khi chịu ảnh hưởng của nhiễu ngoài tác động. Bằng việc phân tích thời gian hội tụ, sai số bám và khả năng phục hồi bám sau khi TOWR chịu ảnh hưởng của nhiễu ngoài tác động, ta có thể đánh giá và so sánh chất lượng của các bộ điều khiển. Để bảo đảm tính khách quan trong quá trình đánh giá, kết quả mô phỏng của bộ điều khiển đề xuất còn được đối chiếu với kết quả của một nghiên cứu đã công bố trước đây [9]. Điểm khác biệt của kịch bản khảo sát trong nghiên cứu này là các bộ điều khiển đều được đặt trong điều kiện có nhiễu ngoài tác động, qua đó cho phép làm rõ hơn sự khác biệt về chất lượng điều khiển, khả năng duy trì quỹ đạo mong muốn, độ bền vững của quá trình bám vị trí, cũng như khả năng phục hồi trạng thái bám sau khi robot bị lệch khỏi quỹ đạo tham chiếu.

**Bảng 1. Các thông số động lực học Robot**

| Đại lượng | Trị số | Đơn vị            |
|-----------|--------|-------------------|
| $L$       | 0.2    | m                 |
| $r$       | 0.04   | m                 |
| $m$       | 9      | kg                |
| $J$       | 0.18   | kg.m <sup>2</sup> |

**Bảng 2. Các thông số bộ điều khiển**

| Đại lượng                                  | Trị số |
|--------------------------------------------|--------|
| $\Gamma_{a1}, \Gamma_{a2}, \Gamma_{a3}$    | 12     |
| $\Gamma_{b1}, \Gamma_{b2}, \Gamma_{b3}$    | 1      |
| $\Gamma_{c1}, \Gamma_{c2}, \Gamma_{c3}$    | 3      |
| $\gamma_1$                                 | 0.8    |
| $\gamma_2$                                 | 1.3    |
| $\lambda_{a1}, \lambda_{a2}, \lambda_{a3}$ | 1.5    |
| $\lambda_{b1}, \lambda_{b2}, \lambda_{b3}$ | 1.2    |
| $\lambda_{c1}, \lambda_{c2}, \lambda_{c3}$ | 1.2    |
| $\mu$                                      | 1.15   |
| $\eta_1$                                   | 0.8    |
| $\eta_2$                                   | 1.2    |

Bảng 1 và Bảng 2 cung cấp các thông số mô hình của TOWR và thông số bộ điều khiển. Trong nghiên cứu này, bậc phân số được lựa chọn là 1,15 nhằm đạt được sự cân bằng giữa tốc độ hội tụ, độ trơn của tín hiệu điều khiển và độ bền vững của hệ trước ảnh hưởng của nhiễu. Giá trị này được xác định thông qua quá trình hiệu chỉnh tham số dựa trên các chỉ tiêu đánh giá như sai số bám, thời gian hội tụ và mức độ dao động của hệ. Trong một khoảng lân cận giá trị này, hiệu năng hệ duy trì ổn định. Tuy nhiên, khi sai lệch đáng kể, chất lượng điều khiển có xu hướng suy giảm.

Ngoài ra, để minh họa rõ ràng khả năng kháng nhiễu và đánh giá khả năng phục hồi bám quỹ đạo của hệ, nhiễu được lựa chọn dưới dạng hàm bước hữu hạn theo thời gian, đại diện cho các tác động đột ngột và bất lợi thường gặp trong thực tế. Dạng nhiễu này gây ra sự thay đổi tức thời trong động học hệ, qua đó cho phép quan sát trực tiếp mức độ suy giảm chất lượng bám cũng như khả năng tái hội tụ của bộ điều khiển sau khi bị nhiễu tác động. Trên cơ sở đó, nhiễu được mô hình hóa dưới dạng một hàm bước hữu hạn theo thời gian và được biểu diễn như sau:

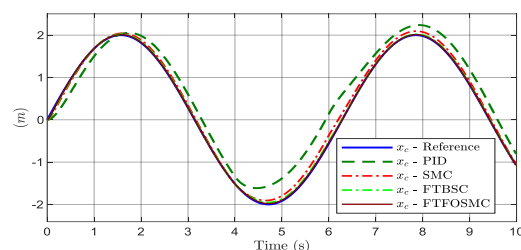
$$\delta_i(t) = \begin{cases} A_i, & 4 \leq t \leq 6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (22)$$

Trong đó  $A_i$  là biên độ nhiễu tác động trên từng kênh.

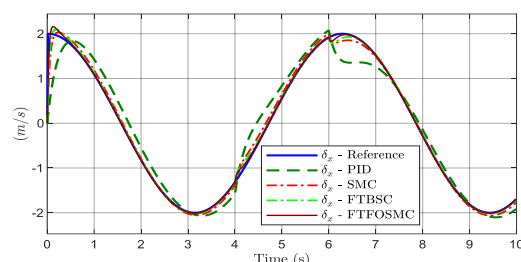
Dựa trên các kết quả mô phỏng ở Hình 2 đến Hình 9, có thể nhận thấy cả bốn bộ điều khiển PID, SMC, FTBSC và FTFOSMC đều bảo đảm được mục tiêu bám quỹ đạo cho robot di động omni ba bánh. Tuy nhiên, chất lượng điều khiển thể hiện sự khác biệt rất rõ về độ chính xác bám, tốc độ hội tụ, mức độ quá điều chỉnh và khả năng duy trì đặc tính bám khi xuất hiện ảnh hưởng của nhiễu ngoài.

Đối với chuyển động tịnh tiến theo phương  $x$  và  $y$ , các đáp ứng vị trí và vận tốc cho thấy bộ PID có sai số bám lớn nhất, độ trễ pha rõ rệt, biên độ lệch đáng kể tại các vùng đỉnh và đáy của tín hiệu tham chiếu. Trong trường hợp này, có thể quan sát được chuyển động của TOWR bị ảnh hưởng mạnh khi nhiễu tác động trong khoảng 4s đến 6s. Điều này phản ánh giới hạn cố hữu của điều khiển tuyến tính cổ điển khi áp dụng cho hệ robot di động có liên kết động học chặt chẽ, bất định mô hình và tác động nhiễu biến thiên theo thời gian. So với PID, bộ SMC cải thiện đáng kể chất lượng bám, rút ngắn thời gian quá độ và làm giảm sai lệch xác lập, cho thấy ưu thế về tính bền vững đối với bất định. Tuy nhiên, đáp ứng của SMC vẫn còn xuất hiện sai lệch cục bộ tại các thời điểm chuyển pha

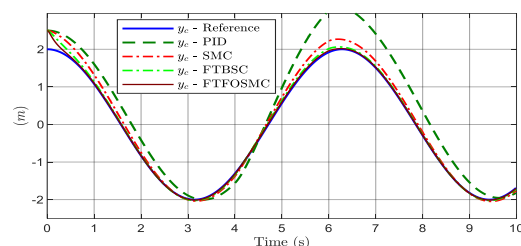
và vùng chịu nhiễu. Điều này cho thấy độ chính xác bám của SMC tuy tốt nhưng chưa thực sự tối ưu trong toàn miền làm việc.



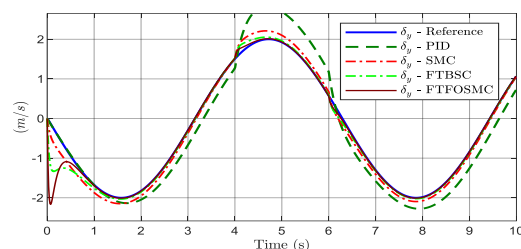
Hình 2. Điều khiển bám vị trí của Robot theo phương  $x$



Hình 3. Điều khiển bám tốc độ của Robot theo phương  $x$



Hình 4. Điều khiển bám vị trí của Robot theo phương  $y$



Hình 5. Điều khiển bám tốc độ của Robot theo phương  $y$

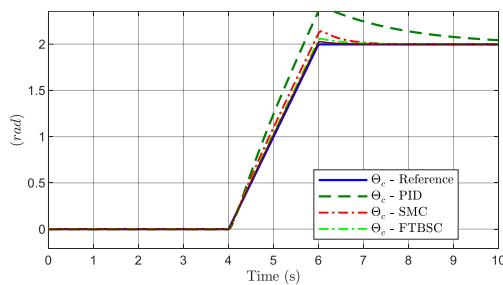
Bộ FTBSC tiếp tục cải thiện hiệu năng điều khiển nhờ đặc tính hội tụ trong thời gian hữu hạn, thể hiện ở việc các quỹ đạo bám tiến gần tín hiệu tham chiếu nhanh hơn so với SMC và duy trì sai số nhỏ hơn trong phần lớn thời gian mô phỏng. Tuy nhiên, tại một số giai đoạn quá độ, đặc biệt quanh thời điểm nhiễu được đưa vào hệ và tại các vùng tín hiệu tham chiếu biến

thiên nhanh, FTBSC vẫn còn xuất hiện độ vọt lố và sai lệch tức thời nhất định. Trong toàn bộ các kết quả mô phỏng, FTFOISM là bộ điều khiển cho đáp ứng tốt nhất và ổn định nhất. Các tín hiệu bám vị trí  $x_c$ ,

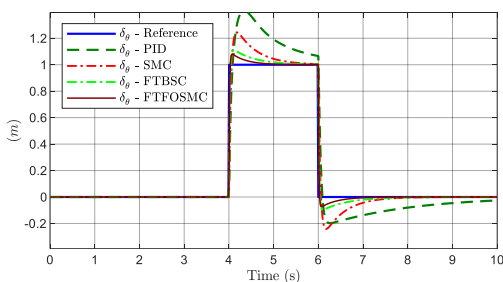
$y_c$ , vận tốc  $\delta_x, \delta_y$ , góc quay  $\theta_c$  và vận tốc góc

$\delta_\theta$  hầu như trùng khớp với tín hiệu tham chiếu, với

thời gian hội tụ ngắn, độ quá điều chỉnh rất nhỏ và sai số sau quá độ được duy trì ở mức thấp nhất. Đặc biệt, trong bài toán bám góc quay và vận tốc góc, vốn nhạy cảm với nhiễu và sự thay đổi lệnh điều khiển dạng bậc thang, FTFOISM vẫn cho đáp ứng mượt, nhanh và ổn định hơn rõ rệt so với PID, SMC và FTBSC. Kết quả này cho thấy việc kết hợp mặt trượt bậc phân số với cơ chế hội tụ fixed-time đã cải thiện đồng thời chất lượng đáp ứng quá độ và tính bền vững của hệ điều khiển trước nhiễu.



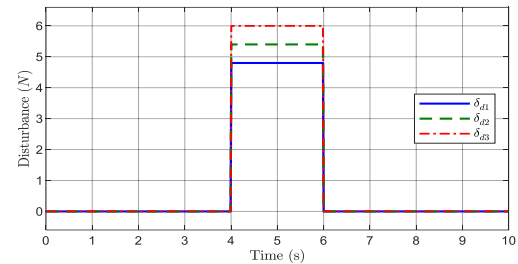
Hình 6. Điều khiển bám góc quay của Robot



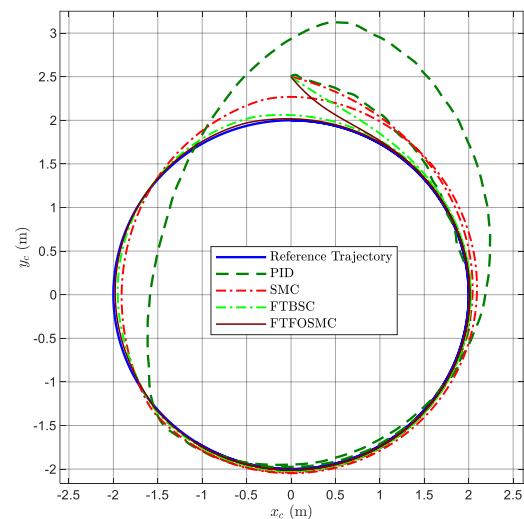
Hình 7. Điều khiển bám vận tốc góc của Robot

Kết quả ở Hình 8 và Hình 9 tiếp tục khẳng định ưu thế đó. Khi robot chịu nhiễu ngoài tác động đồng thời trên các kênh trong khoảng từ 4s đến 6s, quỹ đạo bám trong mặt phẳng xOy của bộ PID bị biến dạng mạnh nhất, với sai lệch hình học so với quỹ đạo tham chiếu lớn và còn kéo dài sau khi nhiễu kết thúc. Bộ SMC và FTBSC cho quỹ đạo bám sát hơn, cho thấy khả năng khử nhiễu đã được cải thiện đáng kể, nhưng vẫn còn tồn tại độ lệch nhất định tại một số vùng trên quỹ đạo. Ngược lại, quỹ đạo của FTFOISM gần như bảo toàn được hình dạng quỹ đạo tròn tham chiếu, có độ méo

nhỏ nhất và phục hồi nhanh nhất sau khi nhiễu mất đi. Từ góc độ điều khiển và robotic, có thể kết luận rằng FTFOISM là bộ điều khiển cho hiệu năng tổng thể vượt trội trong số các phương pháp được khảo sát, nhờ bảo đảm hội tụ nhanh trong thời gian bị chặn trước, nâng cao độ chính xác bám quỹ đạo đa biến và tăng cường khả năng chống nhiễu cho robot omni 3 bánh.



Hình 8. Nhiễu tác động lên Robot



Hình 9. Bám quỹ đạo của Robot trong mặt phẳng xOy

Bảng 3. So sánh RMSE giữa các bộ điều khiển

| Bộ điều khiển | RMSE $x_c$ (m) | RMSE $y_c$ (m) | RMSE $\theta_c$ (rad) |
|---------------|----------------|----------------|-----------------------|
| PID           | 0.312          | 0.356          | 0.214                 |
| SMC           | 0.146          | 0.181          | 0.096                 |
| FTBSC         | 0.083          | 0.109          | 0.061                 |
| FTFOISM       | 0.041          | 0.058          | 0.033                 |

Để đánh giá định lượng chất lượng bám quỹ đạo, Bảng 3 trình bày các giá trị RMSE của từng bộ điều khiển trên các tín hiệu  $x_c, y_c$  và  $\theta_c$ . Kết quả cho thấy độ chính xác bám được cải thiện rõ rệt từ PID đến SMC, FTBSC và đạt tốt nhất với FTFOISM, qua đó

cung cấp minh chứng định lượng cho các nhận xét từ kết quả mô phỏng. Đây là cơ sở thuyết phục để khẳng định tính hiệu quả và tiềm năng ứng dụng của phương pháp đề xuất trong các bài toán điều khiển bám quỹ đạo chính xác cho robot di động đa hướng làm việc trong môi trường bất định và có nhiều tác động.

## 5. Kết luận

Bài báo đã đề xuất một bộ điều khiển trượt bậc phân số hội tụ thời gian cố định cho robot di động đa hướng ba bánh nhằm nâng cao hiệu quả bám quỹ đạo trong điều kiện tồn tại nhiễu ngoài và bất định mô hình. Bộ điều khiển được xây dựng trên cơ sở mô hình động học và động lực học của hệ, trong đó luật điều khiển được thiết kế để bảo đảm sai số bám được dẫn động nhanh về gốc cân bằng với chất lượng quá độ tốt và độ bền vững cao trước các tác động bất lợi từ môi trường. Về mặt lý thuyết, tính ổn định của hệ kín được chứng minh dựa trên lý thuyết Lyapunov, đồng thời bảo đảm đặc tính hội tụ trong thời gian cố định. Cụ thể, bằng cách xây dựng hàm Lyapunov phù hợp, đạo hàm theo thời gian của hàm này được đưa về dạng bất đẳng thức suy giảm phi tuyến, từ đó bảo đảm mọi tín hiệu của hệ kín đều bị chặn và sai số bám hội tụ về không. Hơn nữa, nhờ cấu trúc của luật điều khiển bậc phân số và việc lựa chọn thích hợp các số mũ phi tuyến trong luật điều khiển, hệ còn thỏa mãn điều kiện hội tụ thời gian cố định, tức là tồn tại một cận trên hữu hạn của thời gian hội tụ không phụ thuộc vào điều kiện đầu. Kết quả này cho thấy bộ điều khiển không chỉ bảo đảm tính ổn định và độ bền vững của hệ, mà còn cho phép đánh giá trước đặc tính quá độ thông qua một cận trên hữu hạn của thời gian hội tụ.

Kết quả mô phỏng số đã xác nhận hiệu quả của phương pháp đề xuất. So với bộ điều khiển trượt cổ điển, bộ điều khiển backstepping thời gian hữu hạn và bộ điều khiển PID, bộ điều khiển đề xuất cho thấy sai số bám nhỏ hơn, tốc độ hội tụ nhanh hơn, đáp ứng ổn định hơn và khả năng kháng nhiễu tốt hơn trong toàn bộ quá trình chuyển động. Những kết quả này khẳng định rằng phương pháp đề xuất là một giải pháp điều khiển khả thi và có cơ sở lý thuyết chặt chẽ đối với bài toán bám quỹ đạo của robot omni ba bánh. Trong giai đoạn tiếp theo, nghiên cứu sẽ được mở rộng theo hướng kiểm chứng thực nghiệm trên mô hình phần cứng nhằm đánh giá khả năng triển khai trong môi trường logistics thực tế. Tuy nhiên, các bất định chưa được mô hình hóa, như độ trễ động cơ, ma sát của bánh omni, sai lệch tham số và nhiễu đo, có thể ảnh hưởng đến chất lượng điều khiển và

làm suy giảm một phần tính chất hội tụ thời gian cố định. Do đó, các nghiên cứu tiếp theo sẽ tập trung vào hoàn thiện bộ điều khiển theo hướng nâng cao độ bền vững, tăng cường khả năng bù bất định và cải thiện hiệu năng triển khai thực nghiệm.

## Lời cảm ơn

Xin trân trọng cảm ơn Tập đoàn LG đã tài trợ cho nghiên cứu này. Xin trân trọng cảm ơn Viện Cơ khí, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam và Ban Biên tập Tạp chí Khoa học và Công nghệ Hàng hải đã hỗ trợ trong quá trình hoàn thiện, thẩm định và xuất bản bài báo.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ribeiro, F., Moutinho, I., Silva, P., Fraga, C. & Pereira, N. (2004), *Three omni-directional wheels control on a mobile robot*, Conference paper, University of Bath, UK, September 2004.
- [2] Soe, M., Htay, S. S., Phyu, K. W., Yadanar, S. & Win, W. Y. (2024), *Kinematics and Control A Three-wheeled Mobile Robot with Omni-directional Wheels*, ICCR 2023: 2023 International Conference on Communication and Computer Research, Seoul, Korea.
- [3] Palacín, J., Rubies, E., Clotet, E. & Martínez, D. (2021), *Evaluation of the Path-Tracking Accuracy of a Three-Wheeled Omnidirectional Mobile Robot Designed as a Personal Assistant*, Sensors, Vol.21(21), p.7216.  
Doi: 10.3390/s21217216.
- [4] Takahashi, M., Suzuki, T., Shitamoto, H., Moriguchi, T. & Yoshida, K. (2010), *Developing a mobile robot for transport applications in the hospital domain*, Robotics and Autonomous Systems, Vol.58(7), pp.889-899.  
Doi: 10.1016/j.robot.2010.03.010.
- [5] Istiqphara, S., Darajat, U., Fahmizal & Ferdous, M. F. (2023), *Movement Control of Three Omni-Wheels Robot using Pole Placement State Feedback and PID Control*, Journal of Fuzzy Systems and Control, Vol.1(2), pp.44-48.  
Doi: 10.59247/jfsc.v1i2.36.
- [6] Truong, L. P., Liang Tsai, H. L. T. & Tuan, H. C. (2021), *Development of directional algorithm for three-wheel omnidirectional autonomous mobile robot*, Vietnam Journal of Science and Technology, Vol.59(3), pp.345-356.  
Doi: 10.15625/2525-2518/59/3/15583.

- [7] Hoan, L. T., Dong, T. & Thong, V. V. (2023), *Adaptive Sliding Mode Control for Three-Wheel Omnidirectional Mobile Robot*, International Journal of Engineering Trends and Technology, Vol.71(5), pp.9-17.  
 Doi: 10.14445/22315381/IJETT-V71I5P202.
- [8] Khanh, P. H. K., Trung, N. T., Doan, P. T. & Hung, N. (2013), *Trajectory Tracking Control of Omnidirectional Mobile Robot Using Sliding Mode Controller*, 2013 13th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS), pp.1170-1175.  
 Doi: 10.1109/ICCAS.2013.6704095.
- [9] Hoang, Q. D., Gam, N. T., Tuan, L. A., An, P. D. & Anh, V. T. (2024), *Robust Fast-Terminal Back-Stepping Control for Three-Omni-Wheel Robot*, 2024 International Conference on Control, Robotics and Informatics, pp.27-31.  
 Doi: 10.1109/ICCRI64298.2024.00011.
- [10] Hoang, Q.-D., Nghiem, L. D., Tuan, L. A., An, P. D. & Gam, N. T. (2024), *Kinematic Model and Fast-Terminal Sliding Mode for Four-Mecanum-Wheeled Mobile Robot*, Advances in Engineering Research and Application: Proceedings of the International Conference on Engineering Research and Applications, ICERA 2023, Volume 2. Lecture Notes in Networks and Systems, Vol.944, pp.114-120.  
 Doi: 10.1007/978-3-031-62235-9\_14.
- [11] Ahmed, S., Azar, A. T. & Hameed, I. A. (2023), *Fractional-order Fixed-time Non-singular Sliding Mode Control for Nonlinear Robotic Manipulators*, IFAC-PapersOnLine, Vol.56(2), pp.8105-8110.  
 Doi: 10.1016/j.ifacol.2023.10.965.
- [12] Wu, R., Wei, C., Yang, F., Cui, N. & Zhang, L. (2018), *FxTDO-based non-singular terminal sliding mode control for second-order uncertain systems*, IET Control Theory and Applications, Vol.12(18), pp.2459-2467.  
 Doi: 10.1049/iet-cta.2018.5455.
- [13] Dong, H. Q., Gam, N. T., Cuong, H. M. & Tuan, L. A. (2024), *Fractional-order fast terminal back-stepping sliding mode control of autonomous robotic excavators*, Journal of the Franklin Institute, Vol.361(6), p.106686.  
 Doi: 10.1016/j.jfranklin.2024.106686.
- [14] Li, Y., Chen, Y. & Podlubny, I. (2009), *Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems*, Automatica, Vol.45(8), pp.1965-1969.  
 Doi: 10.1016/j.automatica.2009.04.003.
- [15] Huang, S. & Wang, J. (2020), *Fixed-time fractional-order sliding mode control for nonlinear power systems*, Journal of Vibration and Control, Vol.26(17-18), pp.1425-1434.  
 Doi: 10.1177/1077546319898311.

|                    |            |
|--------------------|------------|
| Ngày nhận bài:     | 27/03/2026 |
| Ngày nhận bản sửa: | 10/04/2026 |
| Ngày duyệt đăng:   | 15/04/2026 |