

PHÂN TÍCH RỄ NHÁNH ĐỐI VỚI DAO ĐỘNG TUẦN HOÀN CỦA XE LU VỚI HAI KÍCH ĐỘNG ĐIỀU HÒA

ANALYZING THE BIFURCATION FOR THE PERIODIC VIBRATIONS OF A ROAD ROLLER WITH TWO HARMONIC EXCITATIONS

HOÀNG MẠNH CƯỜNG*, NGUYỄN MẠNH NÊN, VŨ VĂN TẬP

Viện Cơ khí, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

*Email liên hệ: cuonghm@vimaru.edu.vn

DOI: <https://doi.org/10.65154/jmst.1064>

Tóm tắt

Bài báo này trình bày việc khảo sát rẽ nhánh đối với dao động của xe lu rung có hai kích động điều hòa trong chế độ chuyển động bình ổn. Trước tiên, một mô hình động lực học phi tuyến của hệ đã được thiết lập. Dựa trên phương trình động lực học, kết hợp với lý thuyết rẽ nhánh Floquet, ta xây dựng chương trình tính toán số, khảo sát rẽ nhánh của dao động tuần hoàn đối với xe lu rung. Việc phân tích rẽ nhánh trong dao động của xe lu được thực hiện khi tham số rẽ nhánh được chọn là độ cứng tiếp xúc giữa các bánh lu và mặt đường. Kết quả thu được là các đồ thị mô tả sự rẽ nhánh trong dao động của hệ theo độ cứng tiếp xúc và các đồ thị mô tả dao động tuần hoàn của hệ trong một số trạng thái chuyển động bình ổn trước và sau các điểm rẽ nhánh.

Từ khóa: Xe lu rung, dao động tuần hoàn, động lực học phi tuyến, ổn định Floquet.

Abstract

This paper presents the analysis of branching in oscillations for a vibratory roller with two harmonic excitations in steady motion mode. First, a nonlinear dynamic model of the system was established. Based on the equations of motion, combined with Floquet's branching theory, we develop a numerical program to perform branching analysis of the periodic oscillations of a vibratory roller. The analysis of branching in the vibration of a vibratory roller is performed by selecting the branching parameter as the contact stiffness between the roller wheels and the road surface. The obtained results are the branching diagrams of the system as a function of contact stiffness and the periodic oscillations of the system in several steady-state motion conditions before and after the branching points.

Keywords: Vibratory roller, periodic vibration, nonlinear dynamic, floquet stability.

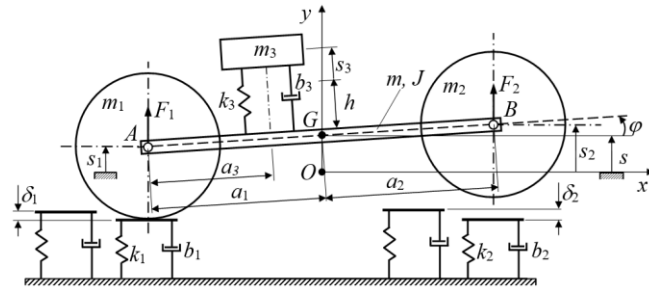
1. Mở đầu

Các xe lu thường được dùng cho việc đầm nén nền đường. Khi thi công, độ cứng của nền đường thay đổi sau mỗi lần đầm nén, dẫn đến độ cứng tiếp xúc giữa mặt đường và các bánh lu sẽ thay đổi theo. Do đó, khi xây dựng mô hình động lực học cho xe lu trong quá trình vận hành, ta sẽ thu được một hệ động lực học phi tuyến trong đó các hàm thế năng đàn hồi sẽ là các hàm không liên tục, chính điều này sẽ làm cho các đáp ứng động lực học của hệ dao động rất phức tạp, trong những hệ như vậy thường xuất hiện sự rẽ nhánh hay dao động hỗn độn [2]. Đã có nhiều công bố về phân tích rẽ nhánh trong dao động của các hệ dao động trong kỹ thuật. Như tính toán dao động tuần hoàn của các hệ phi tuyến mạnh bằng phương pháp cân bằng điều hòa đã được công bố trong các công trình [4 - 8]. Trong các công bố [7, 8], Xu et al. đã tìm các nghiệm tuần hoàn và phân tích rẽ nhánh của hệ dao động trong đó lò xo và cản nhớt là các hàm tuyến tính từng khúc. Shaw và Holmes [9] đã tính toán chuyển động điều hòa, dao động đa hài và dao động hỗn độn đối với hệ phi tuyến một bậc tự do, với thành phần đàn hồi phi tuyến. Trong công trình [10], Natsiavas đã phân tích đặc tính động lực học phi tuyến với giảm chấn kiểu van der Pol. Với công bố [11], Ponce và cộng sự đã nghiên cứu rẽ nhánh đối chu kỳ của một lớp bài toán dao động với các hàm tuyến tính từng đoạn. Bằng thực nghiệm, Wiercigroch et al. [12] đã tìm được dao động hỗn độn của hệ tuyến tính không liên tục. Casini và Vestroni [13] đã phân tích các đáp ứng động lực học của hệ 2 bậc tự do trong đó có các hàm tuyến tính từng khúc.

Trong nghiên cứu này, đề cập đến việc tính toán dao động tuần hoàn và phân tích rẽ nhánh đối với dao động tuần hoàn của xe lu rung với hai kích động điều hòa, khi cho độ cứng tiếp xúc giữa mặt đường và các bánh lu thay đổi.

2. Phương trình động lực học của xe lu với hai kích động điều hòa

Mô hình dao động của xe lu rung với hai kích động điều hòa được cho như Hình 1 [3], trong đó, thân xe



Hình 1. Mô hình dao động của xe lu

được mô hình hóa bởi thanh AB có khối lượng m , momen quán tính đối với khối tâm G là J . Bánh trước được mô hình hóa bởi khối lượng m_1 , bánh sau được mô hình hóa bởi khối lượng m_2 . Sự tiếp xúc giữa các bánh lu và mặt đường, được mô hình hóa bởi các lò xo và giảm chấn, tại bánh trước là k_1, b_1 tại bánh sau là k_2, b_2 . Người vận hành cùng ghế ngồi được xem như một vật nặng có khối lượng m_3 , liên kết với thân xe bởi lò xo k_3 và giảm chấn b_3 . Từ hình 1 ta thấy hệ dao động có 3 bậc tự do, áp dụng phương trình Lagrange loại II [1], ta thiết lập được phương trình động lực học theo các tọa độ suy rộng s_1, s_2, s_3 có dạng:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = F(t) \quad (1)$$

Trong đó:

$$q = [s_1 \quad s_2 \quad s_3]^T \quad (2)$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$C(q, \dot{q}) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T \quad (4)$$

$$G(q) = [g_1 \quad g_2 \quad g_3]^T \quad (5)$$

$$F(t) = [F_1 \quad F_2 \quad 0]^T \quad (6)$$

Đặt:

$$L = a_1 + a_2; \quad \varphi = (s_2 - s_1) / L \quad (7)$$

Khi đó các thành phần của ma trận $M(q)$, ma trận $C(q, \dot{q})$ và véc tơ $G(q)$ có dạng:

$$m_{11} = A_1 + B_1(h + s_3)^2 + C_1 \cos \varphi + D_1(h + s_3) \sin \varphi$$

$$m_{12} = A_2 + B_2(h + s_3)^2 + C_2 \cos \varphi + D_2(h + s_3) \sin \varphi$$

$$m_{13} = A_3 + C_3 \cos \varphi$$

$$m_{22} = A_4 + B_4(h + s_3)^2 + C_4 \cos \varphi + D_4(h + s_3) \sin \varphi$$

$$m_{23} = A_5 + C_5 \cos \varphi$$

$$m_{21} = m_{12}; m_{31} = m_{13}; m_{32} = m_{23}; m_{33} = m_3$$

$$c_1 = H_4 + A_7(h + s_3)(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)\dot{s}_3 + B_7(h + s_3)(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)^2 \cos \varphi + C_7(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)^2 \sin \varphi + D_7(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)\dot{s}_3 \sin \varphi$$

$$c_2 = H_4 + A_7(h + s_3)(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)\dot{s}_3 + B_7(h + s_3)(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)^2 \cos \varphi + C_7(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)^2 \sin \varphi + D_7(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)\dot{s}_3 \sin \varphi$$

$$c_3 = -(m_3 / L^2)(h + s_3)(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)^2 + b_3 \dot{s}_3$$

$$g_1 = H_1 + A_8 + B_8 \cos \varphi + C_8(h + s_3) \sin \varphi$$

$$g_2 = H_2 + A_9 + B_9 \cos \varphi + C_9(h + s_3) \sin \varphi$$

$$g_3 = k_3(s_3 - \delta_3) + m_3 g \cos \varphi$$

Với, các hệ số A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2, \dots, 9$), được cho bởi các công thức dưới đây:

$$A_1 = m_1 + \frac{1}{L^2}[J + (m + m_3)a_2^2 + m_3(a_1 - a_3)^2]$$

$$A_2 = \frac{1}{L^2}[a_1 a_2 m - J - m_3(a_1 - a_3)^2 + m_3 a_1 a_2]$$

$$A_4 = m_2 + \frac{1}{L^2}[J + a_1^2(m + m_3) + m_3(a_1 - a_3)^2]$$

$$A_3 = \frac{m_3(a_1 - a_3)}{L}, A_5 = -A_3, A_6 = \frac{2m_3}{L^2}$$

$$A_7 = -A_6, A_8 = m_1 g + \frac{a_2}{L}(m + m_3)g$$

$$A_9 = m_2 g + \frac{a_1}{L}(m + m_3)g$$

$$B_1 = \frac{m_3}{L^2}, B_6 = -\frac{m_3 a_2}{L^3}, B_7 = -\frac{m_3 a_1}{L}, B_2 = -B_1$$

$$B_8 = \frac{m_3 g(a_1 - a_3)}{L}, B_4 = B_1, B_9 = -B_8$$

$$C_1 = \frac{2m_3 a_2(a_1 - a_3)}{L^2}, C_2 = \frac{m_3(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)}{L^2}$$

$$C_3 = \frac{m_3 a_2}{L}, C_4 = -\frac{2m_3 a_1(a_1 - a_3)}{L^2}, C_5 = \frac{m_3 a_1}{L}$$

$$C_6 = \frac{m_3 a_2(a_1 - a_3)}{L^3}, C_7 = \frac{m_3 a_1(a_1 - a_3)}{L^3}$$

$$C_8 = \frac{m_3 g}{L}, C_9 = -C_8$$

$$D_1 = \frac{2m_3 a_2}{L}, D_2 = \frac{m_3(a_1 - a_2)}{L^2}, D_4 = -\frac{2m_3 a_1}{L^2}$$

$$D_6 = \frac{2m_3 a_2}{L^2}, D_7 = \frac{2m_3 a_1}{L^2}$$

Các hàm H_1, H_2, H_3, H_4 có dạng:

$$H_1 = \begin{cases} 0; & s_1 \geq \delta_1 \\ k_1(s_1 - \delta_1); & s_1 < \delta_1 \end{cases} \quad (8)$$

$$H_2 = \begin{cases} 0; & s_2 \geq \delta_2 \\ k_2(s_2 - \delta_2); & s_2 < \delta_2 \end{cases} \quad (9)$$

$$H_3 = \begin{cases} 0; & s_1 \geq \delta_1 \\ b_1 \dot{s}_1; & s_1 < \delta_1 \end{cases} \quad (10)$$

$$H_4 = \begin{cases} 0; & s_2 \geq \delta_2 \\ b_2 \dot{s}_2; & s_2 < \delta_2 \end{cases} \quad (11)$$

Trong đó $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ là lượng biến dạng ban đầu của các lò xo k_1, k_2 và k_3 .

Các lực kích động F_1, F_2 do các bộ tạo rung của xe lu khi hoạt động gây ra, có dạng:

$$\begin{cases} F_1 = A \sin(\Omega_1 t + \gamma_1) \\ F_2 = B \sin(\Omega_2 t + \gamma_2) \end{cases} \quad (12)$$

Dựa trên phương trình động lực học (1), sau đây ta đi khảo sát rẽ nhánh của dao động tuần hoàn trong vận hành xe lu rung với hai kích động điều hòa.

3. Tính toán dao động và khảo sát rẽ nhánh

Từ hệ phương trình (1), kết hợp với lý thuyết rẽ nhánh Floquet [2], một chương trình tính toán số, khảo sát rẽ nhánh trong dao động của xe lu rung với hai kích động điều hòa đã được thiết lập. Để tính toán số, ta chọn hệ số độ cứng k là tham số rẽ nhánh, các tham số còn

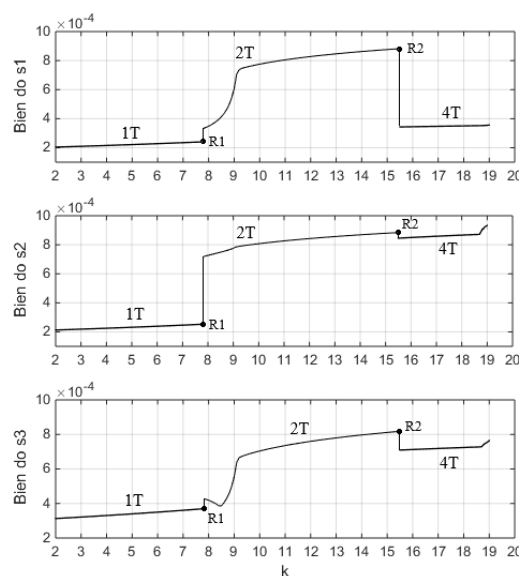
lại của hệ dao động được cho trong Bảng 1 [3].

Với giá trị các tham số như trên Bảng 1, cho k biến thiên trong khoảng [2, 19], sau khi tính toán, phân tích, ta thu được các kết quả cho như trên các Hình từ 2 đến 8.

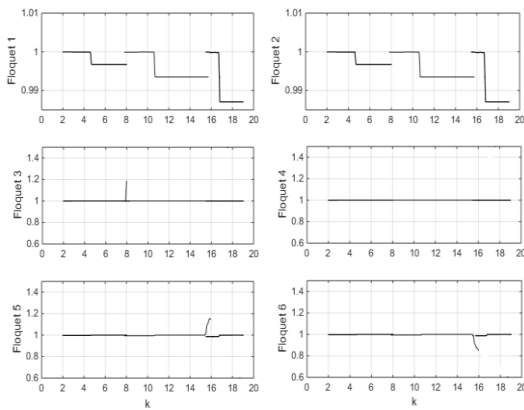
Bảng 1. Giá trị các tham số của hệ dao động

Tham số	Giá trị	Đơn vị	Tham số	Giá trị	Đơn vị
a_1	1.67	m	a_2	1.67	m
a_3	1.4	m	h	1.735	m
m_1	3800	kg	m_2	3800	kg
m_3	80	kg	m	1400	kg
b_1	15	Ns/m	b_2	8	Ns/m
b_3	25	Ns/m	k_1	$k \cdot 10^6$	N/m
k_2	$(k+2) \cdot 10^6$	N/m	k_3	39200	N/m
A	78	kN	B	78	kN
Ω_1	96π	rad/s	Ω_2	96π	rad/s
γ_1	0	rad	γ_2	0	rad

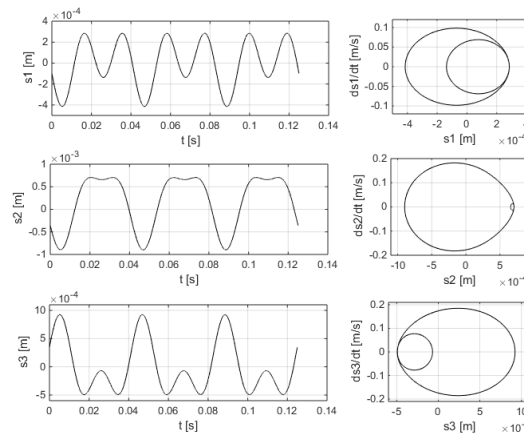
Từ Hình 2 ta thấy, tại $k=2,0$, ta tìm được một nghiệm tuần hoàn ổn định chu kỳ $T = 2\pi/\Omega_1$ (trên Hình 4 là nghiệm tuần hoàn chu kỳ T tại $k=5,0$). Xuất phát từ giá trị này, ta cho k tăng dần lên, tại mỗi giá trị của k , ta tìm được một nghiệm tuần hoàn chu kỳ T ổn định, khi tăng đến giá trị $k=7,8$ ứng với điểm R_1 trên Hình 2, khi tăng k đi qua giá trị này, từ Hình 3 ta thấy có nhân tử Floquet 3 vượt qua giá trị 1, theo lý thuyết rẽ nhánh [2], dao động tuần hoàn chu kỳ T của hệ sẽ mất ổn định. Vậy tại $k=7,8$, ta có điểm rẽ nhánh R_1 . Khi giá trị của k biến thiên qua điểm này nghiệm tuần hoàn chu kỳ T sẽ mất ổn định, dao động của hệ sẽ nhảy đến tập nghiệm mới là nghiệm chu kỳ $2T$. Trên Hình 5 mô tả nghiệm tuần



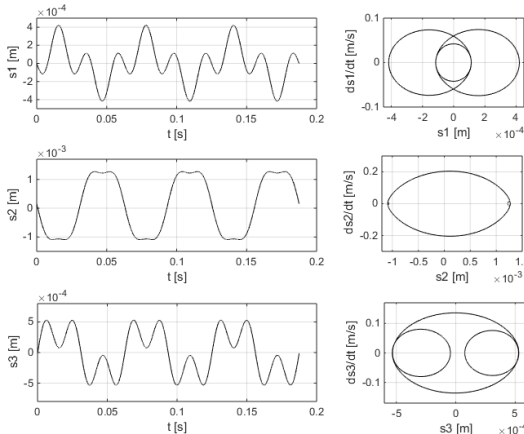
Hình 2. Biểu đồ rẽ nhánh trong dao động của xe lu



Hình 3. Biểu đồ nhân tử Floquet

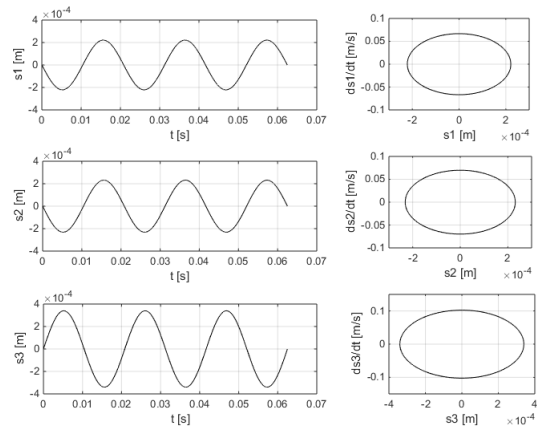


Hình 5. Dao động tuần hoàn chu kỳ $2T$ tại $k = 12$

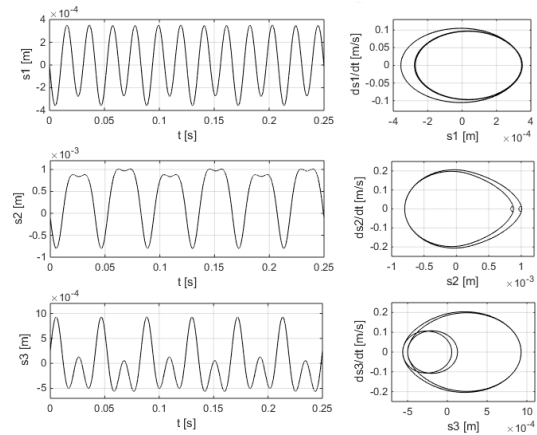


Hình 7. Dao động tuần hoàn chu kỳ $3T$ tại $k = 3,0$

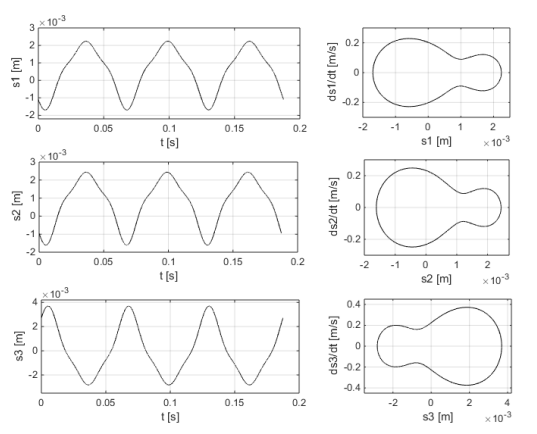
hoàn chu kỳ $2T$. Tiếp tục cho k tăng lên, nghiệm tuần hoàn chu kỳ $2T$ vẫn ổn định, khi k tăng đến giá trị $k=15,5$ ứng với điểm R_2 trên Hình 2, khi đi qua giá trị này, từ Hình 3, ta thấy có nhân tử Floquet 5 vượt qua giá trị 1, theo lý thuyết rẽ nhánh [2] tại đây ta lại có một điểm rẽ nhánh trong dao động. Khi đi qua điểm rẽ nhánh R_2 , dao động của hệ sẽ nhảy đến tập nghiệm tuần hoàn mới, nghiệm chu kỳ $4T$, trên Hình 6, mô tả



Hình 4. Dao động tuần hoàn chu kỳ T tại $k = 5,0$



Hình 6. Dao động tuần hoàn chu kỳ $4T$ tại $k = 18,8$



Hình 8. Dao động tuần hoàn chu kỳ $3T$ tại $k = 8,4$

dao động tuần hoàn chu kỳ $4T$. Ngoài các tập nghiệm tuần hoàn chu kỳ $1T, 2T$ và $4T$, qua tính toán phân tích, trong hệ dao động này còn xuất hiện các nghiệm tuần hoàn chu kỳ $3T$ được cho như trên các Hình 7 và 8.

4. Kết luận

Bài báo này đã phân tích rẽ nhánh của dao động tuần hoàn đối với xe lu rung có hai kích động điều

hòa trong các chế độ chuyển động bình ổn với tham số rẽ nhánh là độ cứng tiếp xúc giữa các bánh lu và mặt đường. Từ các kết quả có được ta thấy, khi cho hệ số độ cứng tiếp xúc k biến thiên từ 2 đến 19, trong hệ dao động xuất hiện các điểm rẽ nhánh nhân đôi chu kỳ. Khi tham số rẽ nhánh k biến thiên qua các giá trị rẽ nhánh, nghiệm tuần hoàn ban đầu của hệ sẽ mất ổn định và dao động của xe lu sẽ nhảy đến một tập nghiệm tuần hoàn mới có chu kỳ dao động được nhân đôi, ngoài ra trong quá trình tính toán và phân tích, đã tìm ra, ngoài các nghiệm tuần hoàn chu kỳ $1T$, $2T$, $4T$, trong hệ còn xuất hiện các nghiệm tuần hoàn chu kỳ $3T$.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số: **DT25-26.43**.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Văn Khang (2017), *Động lực học hệ nhiều vật*, Hà Nội: NXB Khoa học và Kỹ thuật.
- [2] Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (1995), *Applied Nonlinear Dynamics*, New York: John Wiley & Sons.
- [3] Hoàng Mạnh Cường & Vũ Văn Tập (2025), *Phân tích rung động của người khi vận hành xe lu rung hai bánh thép*, Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải, Số 82, tr.91-95.
- [4] Wong, C. W., Zhang, W. S., & Lau, S. L. (1991), *Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method*, Journal of Sound and Vibration, Vol.149(1), pp.91-105.
- [5] Lau, S. L., & Zhang, W. S. (1992), *Nonlinear vibrations of piecewise linear systems by incremental harmonic balance method*, Journal of Applied Mechanics, Vol.59(1), pp.153-160.
- [6] Raghothama, A., & Narayanan, S. (2000), *Bifurcation and chaos of an articulated loading platform with piecewise non-linear stiffness using the incremental harmonic balance method*, Ocean Engineering, Vol.27, pp.1087-1107.
- [7] Xu, L., Lu, M. W., & Cao, Q. (2002), *Nonlinear vibrations of dynamical systems with a general form of piecewise-linear viscous damping by incremental harmonic balance method*, Physics Letters A, Vol.301, pp.65-73.
- [8] Xu, L., Lu, M. W., & Cao, Q. (2003), *Bifurcation and chaos of harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method*, Journal of Sound and Vibration, Vol.264, pp.873-882.
- [9] Shaw, S. W., & Holmes, P. J. (1983), *A periodically forced piecewise linear oscillator*, Journal of Sound and Vibration, Vol.90(1), pp.129-155.
- [10] Natsiavas, S. (1991), *Dynamics of piecewise linear oscillators with Van Der Pol type damping*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.26(314), pp.349-366.
- [11] Ponce, E., Ros, J., & Vela, E. (2013), *Algebraically computable piecewise linear nodal oscillators*, Applied Mathematics and Computation, Vol.219, pp.4194-4207.
- [12] Wiercigroch, M., & Sin, V. W. T. (1998), *Measurement of chaotic vibration in a symmetrically piecewise linear oscillator*, Chaos, Solitons & Fractals, Vol.9(1&2), pp.209-220.
- [13] Casini, P., & Vestroni, F. (2011), *Characterization of bifurcating non-linear normal modes in piecewise linear mechanical systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.46(1), pp.142-150.
- [14] Petrini, M., Demeio, L., & Lenci, S. (2023), *Attractors' Analysis and Bifurcation Diagrams for an Impacting Inverted Pendulum in the Presence of a Two-Terms Harmonic Excitation*, ASME J. Comput. Nonlinear Dyn., Vol.18(10), p.101004. Doi: 10.1115/1.4063034.

Ngày nhận bài:	17/03/2026
Ngày nhận bản sửa:	06/04/2026
Ngày duyệt đăng:	08/04/2026