

**PHÂN TÍCH CẤU TRÚC XOÁY VÀ HIỆU QUẢ TIÊU NẮNG
CỦA NỀN NHÁM LĂNG TRỤ TAM GIÁC VUÔNG ĐỐI VỚI NƯỚC
NHẢY TỰ DO DỰA TRÊN PHƯƠNG PHÁP SỐ**
**ANALYSIS OF VORTEX STRUCTURE AND ENERGY DISSIPATION
EFFICIENCY OF RIGHT TRIANGULAR PRISM ROUGH BEDS FOR FREE
HYDRAULIC JUMPS BASED ON THE NUMERICAL METHOD**
TRỊNH CÔNG TÝ

Khoa Xây dựng Công trình thủy, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

Email liên hệ: tytc@huce.edu.vn

DOI: <https://doi.org/10.65154/jmst.1008>

Tóm tắt

Nước nhảy là cơ chế tiêu tán năng lượng quan trọng trong dòng chảy kênh hở; hiệu quả tiêu năng có thể được cải thiện đáng kể thông qua việc sử dụng các dạng đáy nhám được thiết kế riêng biệt. Trong số các dạng đáy nhám hiện có, nền nhám lăng trụ tam giác vuông tạo ra hiện tượng tách dòng mạnh và hình thành các cấu trúc xoáy phức tạp. Tuy nhiên, mối liên hệ cơ học giữa cấu trúc xoáy, động năng rối và quá trình tiêu tán năng lượng của nước nhảy trên loại nền nhám này vẫn chưa được làm rõ một cách hệ thống. Do vậy, nghiên cứu này sử dụng dữ liệu mô phỏng động lực học chất lỏng (CFD) đã được kiểm chứng để khảo sát, phân tích và đánh giá sự hình thành cấu trúc xoáy, tương tác của dòng chảy với đáy nhám và quá trình tiêu tán động năng rối trong nước nhảy tự do trên nền nhám lăng trụ tam giác vuông. Kết quả góp phần làm sáng tỏ cơ chế tiêu năng tăng cường do đáy nhám chi phối, đồng thời cung cấp cơ sở khoa học cho việc tối ưu thiết kế bề tiêu năng trong các công trình thủy lợi và thoát nước.

Từ khóa: *Nước nhảy tự do, nền nhám lăng trụ tam giác vuông, cấu trúc xoáy, tiêu tán năng lượng, bề tiêu năng.*

Abstract

Hydraulic jumps play a fundamental role in energy dissipation in open-channel flows, and their energy dissipation efficiency can be substantially enhanced by employing appropriately designed rough beds. Among various roughness configurations, right triangular prismatic rough beds are known to induce intense flow separation and generate highly complex vortex structures. Nevertheless, the underlying mechanical relationship between

vortex dynamics, turbulent kinetic energy dissipation, and the overall energy dissipation of hydraulic jumps over such rough beds has not yet been systematically clarified. In this study, validated computational fluid dynamics (CFD) simulations are employed to investigate the formation and evolution of vortex structures, the interaction between the flow and the rough bed geometry, and the associated turbulent kinetic energy dissipation in free hydraulic jumps over right triangular prismatic rough beds. The findings provide new insights into the roughness-dominated energy dissipation mechanism and establish a scientific basis for the optimized design of energy dissipation basins in hydraulic and drainage engineering applications.

Keywords: *Free hydraulic jump, right triangular prism rough beds, vortex structure, energy dissipation, stilling basin.*

1. Đặt vấn đề

Nước nhảy hoàn chỉnh là một trong những biện pháp tiêu tán năng lượng chủ đạo trong các công trình thủy lợi, thoát nước dòng chảy hở (đập tràn xả lũ, dốc nước, cống, ...) có bố trí bề tiêu năng nhằm giảm năng lượng dòng chảy xiết qua đập tràn hay cống, giúp hạn chế nguy cơ xói lở hạ lưu [1, 2]. Hiệu quả tiêu năng của nước nhảy phụ thuộc mạnh vào tương tác chất lỏng tại vùng nước xoáy (roller zone) và cấu trúc dòng chảy gần đáy. Nhiều nghiên cứu kinh điển đã tập trung làm rõ các đặc trưng của nước nhảy trên nền trơn, bao gồm đặc trưng hình học vùng nước nhảy (độ sâu liên hợp nước nhảy y_2 , chiều dài nước nhả L_j , đường mặt nước), phân bố vận tốc và cấu trúc rối tổng thể [3-11]. Tuy nhiên, đáy trơn thường dẫn đến chiều dài khu nước xoáy (L_r) lớn và hiệu quả tiêu năng hạn chế, do đó các mô hình đáy nhám nhân tạo đã được sử dụng rộng

rãi nhằm gia tăng mức độ rối và tăng cường sự xáo trộn dòng chảy.

Nền nhám góp phần tạo ra hiện tượng tách dòng và phát sinh xoáy phía sau phần tử nhám, từ đó làm biến đổi đáng kể cấu trúc thủy động lực của nước nhảy [12, 13]. Các nghiên cứu trước đây đã khảo sát nhiều dạng nhám nhân tạo như: Khối lập phương, khối đa giác, khối lăng trụ nhám hình sin, tam giác, chữ nhật, tam giác vuông, ... [14-26], cho thấy đáy nhám có thể làm giảm khoảng 20% đến 50% chiều dài nước nhảy (L_j) so với đáy trơn và cải thiện đáng kể mức độ tiêu tán năng lượng (η). Tuy nhiên, ảnh hưởng của đáy nhám dạng lăng trụ tam giác vuông, cũng như các mô hình đáy nhám nói chung, vẫn chưa được phân tích một cách đầy đủ, đặc biệt dưới góc độ cấu trúc xoáy và sự phân bố tiêu tán động năng rối trong dòng chảy.

Mặt khác, cấu trúc xoáy giữ vai trò trung tâm trong việc kiểm soát trao đổi động lượng, quá trình xáo trộn và mức độ tiêu tán năng lượng trong nước nhảy [12, 25]. Đồng thời, mức tiêu tán năng lượng tổng thể phụ thuộc mạnh vào sự phát triển của dòng rối trong vùng chân nước nhảy, vùng nước xoáy và khu vực sát đáy nhám. Do đó, cần thiết tiến hành nghiên cứu chuyên sâu hơn nhằm mô tả chi tiết động lực xoáy và cơ chế tiêu tán năng lượng trên nền nhám lăng trụ tam giác vuông để lấp đầy khoảng trống nghiên cứu này.

Gần đây, các tiêu chí nhận diện xoáy truyền thống và hiện đại như: Tiêu chí Q (Q - criterion) hay phương pháp Liutex/Rortex (Liutex/Rortex method) đã được ứng dụng cho các dòng chảy có tách dòng phức tạp để tách riêng thành phần quay thực khỏi biến dạng, cho phép nhận diện chính xác các cấu trúc xoáy và theo dõi sự tiến hóa của chúng [12, 27]. Trong nghiên cứu về nước nhảy trên đáy nhám, phương pháp Liutex/Rortex được chứng minh hiệu quả hơn tiêu chí Q trong việc nắm bắt cấu trúc quay thực và mối liên hệ với tiêu tán năng lượng, đặc biệt khi sử dụng mô hình rối RNG $k-\epsilon$ kết hợp với CFD [27].

Mặc dù, đã có một số công trình nghiên cứu [10, 12, 27] góp phần mở rộng hiểu biết về sự hình thành và phát triển của xoáy trong nước nhảy. Nhưng chưa có nghiên cứu nào tích hợp đồng thời các tiêu chí nhận diện xoáy, phân tích động năng rối (TKE, k) và tốc độ tiêu tán năng lượng (ϵ) để làm rõ, hiểu biết đầy đủ về cơ chế tiêu tán năng lượng do đáy nhám chi phối. Khoảng trống này đặc biệt rõ khi xem xét các nền nhám hình học phức tạp như lăng trụ tam giác vuông [25], vốn tạo ra các xoáy và đập mạnh và khác biệt so với các dạng nhám truyền thống. Do đó, nghiên cứu này tập trung vào việc phân tích sự tiến hóa của cấu trúc xoáy và mối quan hệ của chúng với các đặc trưng k , ϵ trong nước nhảy trên nền nhám lăng

trụ tam giác vuông [25], nhằm cung cấp một cách tiếp cận toàn diện cho việc đánh giá hiệu quả tiêu năng và tối ưu hóa các thiết kế bề tiêu năng.

2. Cơ sở dữ liệu và phương pháp nghiên cứu

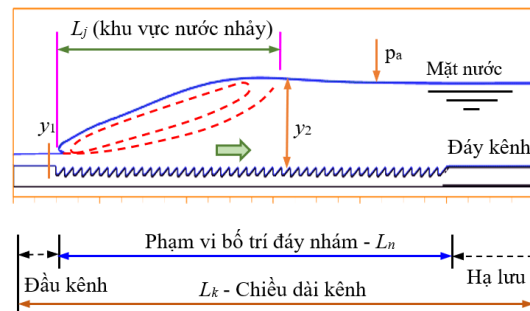
2.1. Cơ sở dữ liệu nghiên cứu

Dữ liệu sử dụng trong nghiên cứu này được kế thừa từ công trình đã công bố của T. C. Tý và nhóm nghiên cứu [25], với mô hình CFD đã được kiểm chứng và hiệu chỉnh dựa trên bộ dữ liệu thực nghiệm của H. Samadi-Boroujeni và nhóm nghiên cứu [21], qua các thông số thủy lực đặc trưng bao gồm: Độ sâu liên hợp sau nước nhảy (y_2), chiều dài nước nhảy (L_j) và phân bố vận tốc dòng chủ trong vùng nước nhảy. Bên cạnh đó, [25] cũng đã tiến hành phân tích độ nhạy của lưới tính toán đối với hai tham số thủy lực quan trọng (y_2 và L_j), qua đó khẳng định độ tin cậy và tính hội tụ của mô hình số.

Từ tài liệu [25], các cấu hình đáy nhám được hệ thống hóa trong Bảng 1, trong khi sơ đồ nước nhảy hoàn chỉnh (tự do, ổn định) trên nền nhám lăng trụ tam giác vuông được trình bày chi tiết tại Hình 1. Kết quả mô phỏng số được tổng hợp trong Bảng 2, bao gồm 210 trường hợp tính toán với các tổ hợp điều kiện thủy lực và hình học đáy nhám khác nhau, tạo thành bộ cơ sở dữ liệu có tính hệ thống và bao quát.

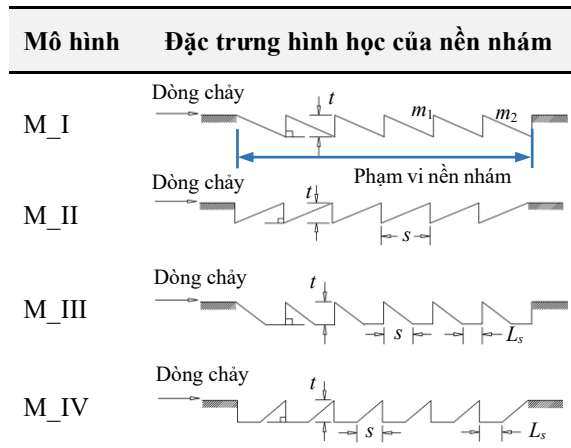
Cụ thể, đối với mỗi trường hợp mô phỏng, các điều kiện đầu vào của mô hình số bao gồm: Loại hình đáy nhám, điều kiện dòng chảy xiết đầu kênh (đặc trưng bởi y_1 và số Fr_1), cùng với giá trị y_2 thử dần. Kết quả đầu ra thu được bao gồm: Các thông số thủy lực cơ bản (y_2 , L_j) và các đặc trưng thủy động lực học của dòng chảy trong vùng nước nhảy.

Trên cơ sở đó, bộ dữ liệu gồm 210 kịch bản mô phỏng được sử dụng để phân tích cấu trúc xoáy và đánh giá hiệu quả tiêu năng của dòng chảy trên nền nhám nghiên cứu, đảm bảo tính nhất quán về phương pháp và độ tin cậy về mặt khoa học.



Hình 1. Nước nhảy hoàn chỉnh trên nền nhám [25]

Bảng 1. Mô hình đáy nhám nghiên cứu [25]



Trong đó: t , s là chiều cao và chiều rộng của phần từ nhám; L_s là khoảng cách giữa các mô nhám; m_1 , m_2 tương ứng là hệ số mái dốc phần từ nhám về thượng và hạ lưu kênh [25].

Bảng 2. Trường hợp mô phỏng và kết quả [25]

Mô hình	Trường hợp mô phỏng	Fr_1 (-)	y_1 (cm)	y_2 (cm)	L_j (m)
M_I	No. (1 ÷ 45)	4,8 ÷ 9,4	1,5 ÷ 3,0	7,3 ÷ 31,6	0,28 ÷ 1,25
M_II	No. (46 ÷ 90)	4,8 ÷ 8,6	1,5 ÷ 2,5	7,2 ÷ 24,2	0,30 ÷ 0,87
M_III	No. (91 ÷ 150)	5,0 ÷ 8,6	1,5 ÷ 3,0	7,6 ÷ 28,1	0,27 ÷ 1,08
M_IV	No. (151 ÷ 210)	5,0 ÷ 8,6	1,5 ÷ 2,5	7,35 ÷ 23,2	0,32 ÷ 0,82

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu này ứng dụng tiêu chí Q và phương pháp Liutex/ Rortex là các công cụ truyền thống và hiện đại để nhận diện và biểu diễn cấu trúc xoáy trong nước nhảy. Cơ sở lý thuyết của 2 phương pháp nêu trên được giới thiệu rất cơ bản như sau:

Tiêu chí Q dựa trên phân tích của tensor gradient vận tốc ∇V , với $V = (u, v, w)$, tensor ∇V có thể được phân tích thành phần đối xứng S_{ij} và phần đối xứng Ω_{ij} , trong không gian 3 chiều: i, j có các giá trị là 1, 2 và 3; i chỉ thành phần vận tốc (u, v, w) ; j chỉ hướng theo tọa độ (x, y, z) . Tiêu chí Q được xây dựng nhằm biểu thị sự chiếm ưu thế của chuyển động quay so với biến dạng, biểu thức xác định Q như sau:

$$Q = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}); \quad (1)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

Xét về mặt ý nghĩa vật lý, vùng có $Q > 0$ là vùng chuyển động quay chi phối hay vùng có khả năng là lõi xoáy (vortex core) [28]. Ngược lại, vùng có $Q < 0$ là vùng biến dạng chi phối, không phải vùng xoáy. Do vậy, tiêu chí Q là một trong những phương pháp nhận dạng xoáy truyền thống và phổ biến nhất trong vấn đề tính toán động lực học chất lỏng.

Phương pháp Liutex/ Rortex được định nghĩa là vector Liutex/ Rortex, có thể biểu diễn rõ ràng cả hướng và độ lớn của chuyển động quay. Chi tiết về định nghĩa toán học của Liutex/ Rortex có thể được tìm thấy trong tài liệu C. Liu và nkk. [29]. Dạng vector của Liutex/Rortex nhận được từ phương trình (2) và độ lớn được xác định bởi phương trình (3).

$$\vec{R} = \left\{ \langle \vec{\omega}, \vec{r} \rangle - \sqrt{\langle \vec{\omega}, \vec{r} \rangle^2 - 4\lambda_{ci}^2} \right\} \vec{r} \quad (2)$$

$$R = \langle \vec{\omega}, \vec{r} \rangle - \sqrt{\langle \vec{\omega}, \vec{r} \rangle^2 - 4\lambda_{ci}^2} \quad (3)$$

Trong đó: R , \vec{r} lần lượt là độ lớn và hướng của Liutex/ Rortex; $\vec{\omega}$ véc tơ xoáy và λ_{ci} là phần ảo của giá trị ngưỡng.

3. Kết quả và thảo luận

3.1. Nhận diện và phân tích cấu trúc xoáy trong nước nhảy đáy nhám

Hiện tượng nước nhảy trên đáy nhám được đặc trưng bởi trường vận tốc thay đổi rất nhanh, biến dạng mạnh và tương tác phức tạp giữa dòng chảy chính (dòng chủ - main flow) với cấu hình đáy nhám. Trong bối cảnh này, việc nhận diện và phân tích cấu trúc xoáy là cơ sở quan trọng để hiểu rõ cơ chế phát sinh rối và tiêu tán năng lượng dòng chảy. Bài báo sử dụng đồng thời tiêu chí Q và phương pháp Liutex/Rortex thông qua quá trình hậu xử lý CFD nhằm mô tả đầy đủ đặc trưng xoáy của dòng chảy cho nước nhảy đáy nhám nghiên cứu.

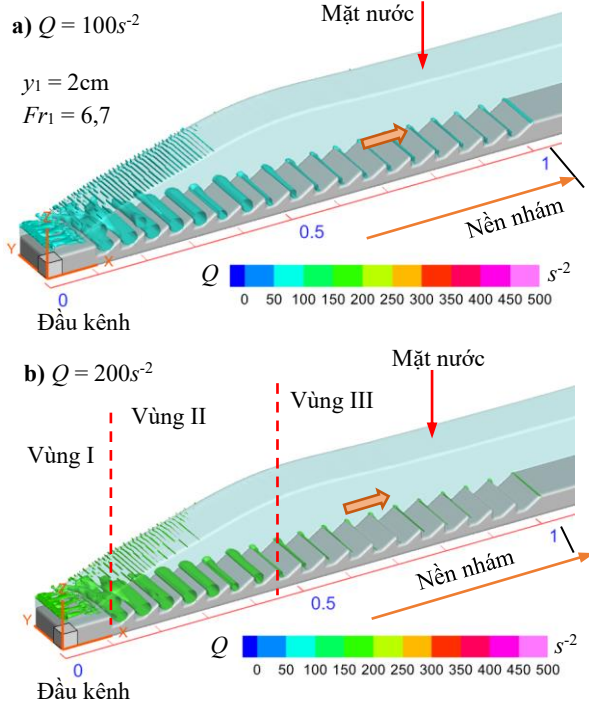
Hình 2 trình bày phân bố không gian của cấu trúc xoáy trong nước nhảy được nhận diện theo tiêu chí Q với 2 giá trị ngưỡng $Q = 100$ và $200s^{-2}$ tại số $Fr_1 = 6,7$ cho mô hình đáy nhám M_IV8 (No.188). Theo định nghĩa, $Q > 0$ biểu thị các vùng mà năng lượng quay của dòng chảy chiếm ưu thế so với biến dạng, cho phép nhận diện sơ bộ các khu vực có khả năng tồn tại xoáy. Kết quả cho thấy các vùng $Q > 0$ xuất hiện chủ

yếu tại hai khu vực đặc trưng của nước nhảy vùng I, II (xem Hình 2b).

Với các giá trị ngưỡng $Q = 100$ và 200 s^{-2} , kết quả cho thấy sự tương đồng trong việc nhận diện phân bố các cấu trúc xoáy dọc theo kênh. Tuy nhiên, khi tăng ngưỡng Q lên 200 s^{-2} , mật độ xoáy quan sát được tại vùng I (kênh dẫn vào), vùng III (đáy kênh hạ lưu sau nước nhảy) và tại mặt thoáng trong khu vực nước nhảy (vùng II) giảm rõ rệt, trong khi khu vực chân nước nhảy và vùng đáy nhám trong vùng II hầu như không có sự thay đổi đáng kể. Điều này cho thấy hạn chế của tiêu chí Q trong việc nhận diện các cấu trúc xoáy thực trong dòng chảy nước nhảy. Cụ thể, tiêu chí này có xu hướng nhận diện cả các vùng có biến dạng cắt mạnh nhưng không nhất thiết tồn tại chuyển động quay thực, điển hình như tại vùng I và khu vực mặt thoáng của nước nhảy. Do đó, mặc dù tiêu chí Q cho phép xác định nhanh phạm vi ảnh hưởng tổng quát của các vùng rối, nhưng chưa đủ khả năng làm sáng tỏ bản chất của các cấu trúc xoáy đóng vai trò chi phối cơ chế tiêu tán năng lượng trong nước nhảy.

Mô hình đáy nhám **M_IV8** (No.188).

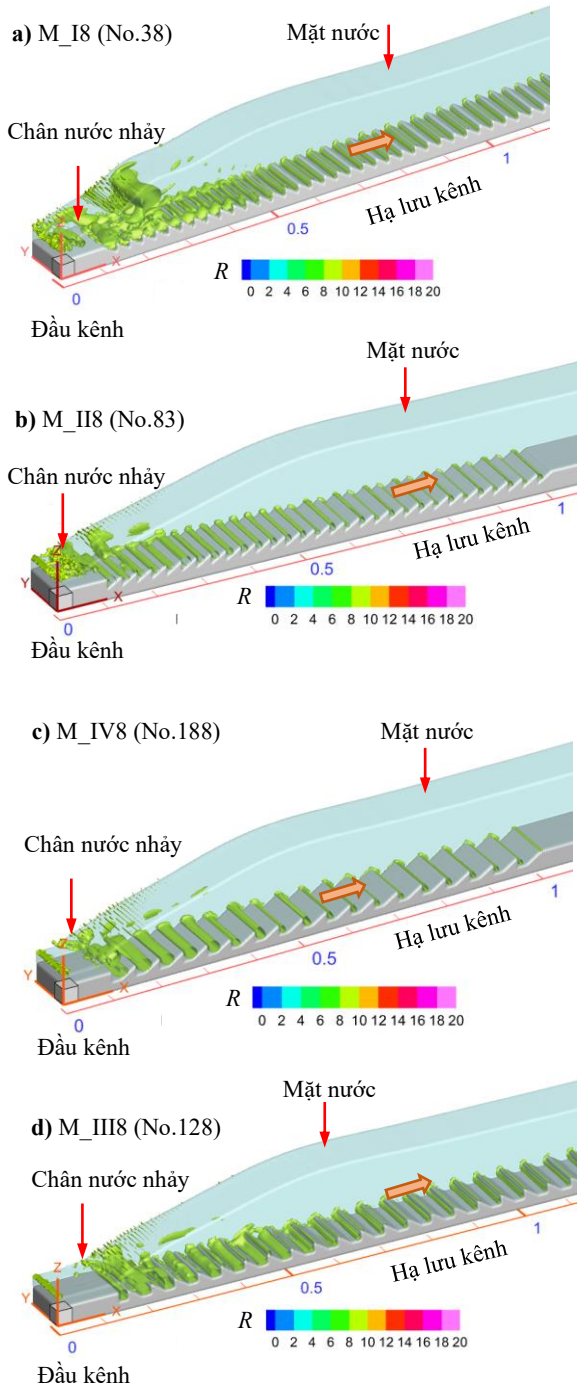
(Đáy nhám: $t = 2\text{cm}$, $s = 3\text{cm}$, $L_s = 2\text{cm}$, mái dốc $m = 1,5$)



Hình 2. Nhận diện phân bố không gian cấu trúc xoáy theo tiêu chí Q với giá trị ngưỡng 100 và 200 s^{-2}

Để khắc phục hạn chế của tiêu chí Q , phương pháp Liutex/Rortex được sử dụng nhằm tách riêng thành phần quay thực khỏi trường biến dạng (xem Hình 3). Kết quả theo Liutex/Rortex cho thấy các xoáy quay

(Đáy nhám: $t = 2\text{cm}$, $s = 3\text{cm}$, $L_s = 2\text{cm}$, mái dốc $m = 1,5$)



Hình 3. Nhận diện phân bố không gian cấu trúc xoáy theo phương pháp Liutex/Rortex với $y_1 = 2\text{cm}$, $Fr_1 = 6,7$

thực hình thành rõ rệt ngay tại vùng chân nước nhảy, nơi dòng chảy có sự đổi hướng đột ngột và tương tác mạnh với các phần tử nhám đầu tiên. Các xoáy này có trục quay xác định rõ ràng, với cường độ lớn và hướng quay phù hợp với chiều chuyển động của dòng chảy chính. Theo chiều dòng chảy, các xoáy ban đầu bị kéo giãn, nghiêng trục và phân tách thành

nhiều cấu trúc xoáy thứ cấp do tác động của trường vận tốc không đồng đều và hình học đáy nhám. Hình 3 cho thấy quá trình này diễn ra liên tục, thể hiện sự tiến hóa điển hình của cấu trúc xoáy trong dòng chảy rối, từ các xoáy quy mô lớn được tạo ra tại chân nước nhảy đến các xoáy nhỏ hơn phân bố trong lớp sát đáy và vùng rối phía trên. Cấu trúc xoáy dòng chảy gần đáy, nơi chịu ảnh hưởng trực tiếp của mô nhám được nhận diện khá rõ ràng. Điều này cho thấy đáy nhám không chỉ làm gia tăng sự xáo trộn cục bộ mà còn đóng vai trò chủ động trong việc duy trì và tái sinh các xoáy quay thực dọc theo chiều dòng chảy. So với kết quả nhận diện theo tiêu chí Q , phương pháp Liutex/Rortex cho phép xác định chính xác các cấu trúc xoáy có ý nghĩa vật lý, là các tác nhân trực tiếp tham gia vào quá trình truyền và phân rã năng lượng. Đây là cơ sở quan trọng để liên kết phân tích cấu trúc xoáy với các đặc trưng rối định lượng như động năng rối k và tốc độ tiêu tán năng lượng rối ε .

Sự tiến hóa của cấu trúc xoáy trong nước nhảy trên đáy nhám M_IV8 được nhận diện khá chi tiết trên Hình 4, bằng phương pháp Liutex/Rortex tại các thời điểm với chu kỳ T , cung cấp cái nhìn động học về quá trình hình thành, phát triển, tương tác và suy giảm của các cấu trúc xoáy trong vùng nước nhảy:

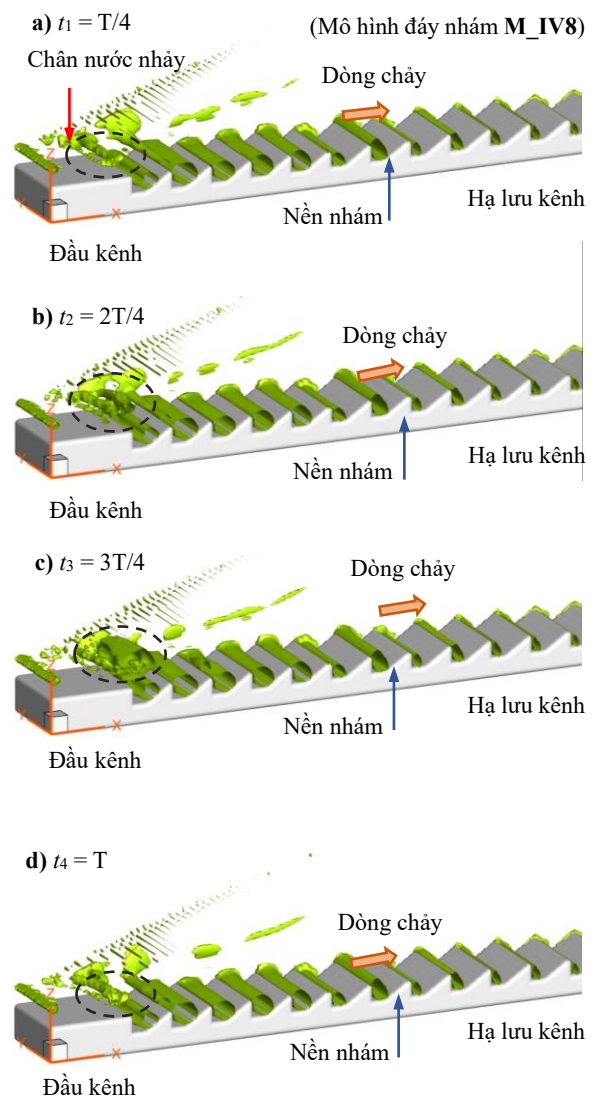
(i) Giai đoạn hình thành xoáy tại chân nước nhảy ($t_1 = T/4$): Từ Hình 4a cho thấy các cấu trúc xoáy quay thực đầu tiên được hình thành ngay tại vùng chân nước nhảy. Tại đây, sự đảo chiều cục bộ của dòng chảy và sự thay đổi vận tốc nhanh tạo điều kiện cho các xoáy có cường độ cao xuất hiện với trục quay rõ ràng. Các xoáy sơ cấp này đóng vai trò là nguồn sinh rối ban đầu, chuyển hóa động năng dòng chảy trung bình thành động năng rối.

(ii) Giai đoạn phát triển và tương tác xoáy trong vùng rối chính ($t_2 = 2T/4$ và $t_3 = 3T/4$): Ở khu vực ngay sau chân nước nhảy, Hình 4b và c cho thấy các xoáy sơ cấp không tồn tại độc lập mà nhanh chóng tương tác với nhau cũng như với trường vận tốc không đồng đều do hình học đáy nhám tạo ra. Các xoáy bị kéo giãn, nghiêng trục và phân tách thành các xoáy thứ cấp có quy mô lớn, nhỏ khác nhau. Sự xuất hiện đồng thời của nhiều xoáy với cường độ khác nhau trong cùng một khu vực phản ánh trạng thái rối phát triển mạnh, trong đó các xoáy liên tục trao đổi năng lượng thông qua tương tác phi tuyến. Đây chính là biểu hiện của quá trình truyền năng lượng từ thang lớn xuống các thang nhỏ hơn, một đặc trưng cốt lõi của dòng chảy rối trong nước nhảy.

(iii) Giai đoạn suy giảm và tái sinh xoáy ($t_4 = T$): Mặc dù các xoáy ở vùng trên đã quay trở lại cho chu

kỳ tiếp theo, nhưng các xoáy gần đáy vẫn được duy trì và tái sinh do tương tác lặp lại giữa dòng chảy và các phần tử nhám. Ở các vị trí xa hơn về hạ lưu như Hình 4d cho thấy cường độ các xoáy giảm dần. Đây là giai đoạn mà năng lượng rối đã được chuyển phần lớn sang các thang nhỏ và bị tiêu tán bởi độ nhớt của chất lỏng. Quá trình suy giảm này không diễn ra đột ngột mà mang tính liên tục, phản ánh sự cân bằng giữa quá trình sinh rối tại đáy nhám và quá trình tiêu tán năng lượng.

(Đáy nhám: $t = 2\text{cm}$, $s = 3\text{cm}$, $L_s = 2\text{cm}$, mái dốc $m = 1,5$)



Hình 4. Sự tiến hóa của cấu trúc xoáy trong nước nhảy trên nền nhám với điều kiện $y_1 = 2\text{ cm}$, $Fr_1 = 6,7$

Tổng hợp các phân tích từ Hình 4 cho thấy cấu trúc xoáy trong nước nhảy trên đáy nhám trải qua một chu trình khá hoàn chỉnh gồm: Hình thành, phát triển, tương tác, phân rã và tiêu tán. Chu trình này chính là biểu hiện cụ thể cho quá trình truyền động năng rối từ

các xoáy lớn xuống các xoáy nhỏ hơn cho đến khi bị tiêu tán trong dòng chảy rối. Do đó, các cấu trúc xoáy quay thực được nhận diện bằng Liutex/Rortex không chỉ mang ý nghĩa mô tả hình thái dòng chảy mà còn đóng vai trò trung tâm trong việc điều khiển phân bố đặc trưng k và ε .

Từ các kết quả nghiên cứu trên cho thấy các xoáy trong nước nhảy trên đáy nhám là những cấu trúc quay thực có nguồn gốc cơ học rõ ràng, tiêu chí Q xác định nhanh phạm vi vùng rối, còn phương pháp Liutex/Rortex nhận diện chính xác các xoáy trực tiếp tham gia truyền và phân rã năng lượng dòng chảy. Để định lượng mức đóng góp của các cấu trúc này vào hiệu quả tiêu năng, nghiên cứu tiếp tục phân tích hai đại lượng rối mang tính năng lượng là động năng rối k và tốc độ tiêu tán ε . Việc khảo sát phân bố không gian của k , ε và đối chiếu với các vùng xoáy đã xác định cho phép thiết lập mối liên hệ định lượng giữa cấu trúc xoáy - động năng rối - tiêu tán năng lượng, qua đó làm rõ sự khác biệt về hiệu quả tiêu năng giữa các cấu hình đáy nhám.

3.2. Đặc trưng rối của dòng chảy với nước nhảy trên nền nhám

Trong động lực học chất lỏng, động năng rối (Turbulence kinetic energy - TKE, k) là động năng trung bình trên mỗi đơn vị khối lượng liên quan đến các xoáy trong dòng chảy rối. Về mặt vật lý, động năng rối được đặc trưng bởi các dao động vận tốc (u' , v' , w') trung bình phương đo được, công thức (4).

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{(u')^2} + \overline{(v')^2} + \overline{(w')^2} \right) \quad (4)$$

Với mô phỏng CFD, k không được tính trực tiếp từ dao động vận tốc tức thời mà được xác định thông qua phương trình vận chuyển TKE. Trường hợp với mô hình rối RNG k - ε cho các mô phỏng số [25]:

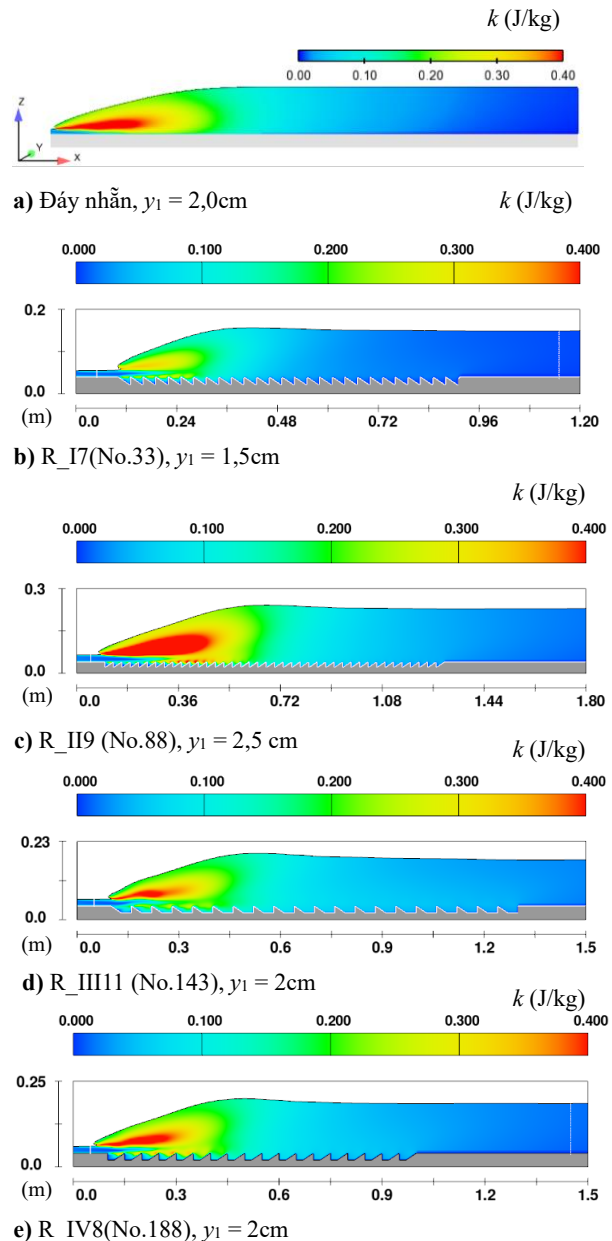
$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \varepsilon \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (6)$$

Trong đó, k và ε lần lượt là động năng rối và tốc độ tiêu tán năng lượng rối. Các hằng số $\sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_{1\varepsilon}$ và $C_{2\varepsilon}$ được giới thiệu bởi V. Yakhot và nnk [30].

Các hình từ (a) đến (e) trong Hình 5 thể hiện phân bố không gian của trị số k theo phương dọc dòng chảy với cùng số $Fr_1 = 6,7$. Quan sát cho thấy, vùng có giá

trị k cao luôn xuất hiện tại biên ranh giới giữa dòng chủ (trạng thái chảy xiết) và khu vực nước xoáy, vùng k cao mở rộng theo độ sâu, phân bố k có dạng bất đối xứng rõ rệt, với cường độ rối lớn tập trung gần đáy hơn. Điều này phản ánh vai trò của đáy nhám trong việc: (i) tăng tốc độ thay đổi vận tốc gần đáy, (ii) kích thích các xoáy thứ cấp và vùng tách dòng phía sau phần tử nhám bố trí.



Hình 5. Trị số k trên các đáy nhám với cùng $Fr_1 = 6,7$

Một số sự khác biệt về đặc điểm rối của dòng chảy trong nước nhảy giữa đáy trơn và nhám được phân tích trong Bảng 3. Về bản chất vật lý, đáy trơn chỉ tạo rối thông qua thay đổi vận tốc lớn theo phương vuông góc với dòng chảy, trong khi đáy nhám tạo thêm nhiều nguồn sinh rối thứ cấp, làm thay đổi lớn cấu trúc rối của nước nhảy.

Bảng 3. Đặc điểm rối của dòng chảy tại nước nhảy

Đặc điểm	Đáy trơn	Đáy nhám
Vị trí k cực đại.	Tập trung ở ranh giới dòng chủ và khu nước xoáy.	Ranh giới dòng chủ và khu nước xoáy; vùng gần đáy.
Phân bố theo độ sâu.	Vùng rối hẹp, suy giảm chậm.	Vùng rối mở rộng, suy giảm nhanh.
Tính đồng nhất.	Phân bố tương đối mượt.	Phân bố không đều, xuất hiện đỉnh cục bộ.
Cơ chế sinh rối.	Thay đổi vận tốc lớn theo phương vuông góc dòng chảy.	Thay đổi vận tốc lớn theo phương vuông góc dòng chảy; Tách dòng và xoáy sau nhám.

Dựa trên phân bố giá trị của k trên Hình 5. Giá trị k_{max} đạt khoảng 0,35 đến 0,4 J/kg và tập trung chủ đạo tại ranh giới dòng chủ và vùng nước cuộn, trên đỉnh các mố nhám rõ rệt hơn so với đáy trơn. Tốc độ thay đổi của k suy giảm nhanh theo chiều dài nước nhảy hơn so với đáy trơn (chiều dài nước nhảy trên đáy nhám giảm khoảng 50% so với đáy trơn [25]). Trên đáy nhám nghiên cứu, sự khác biệt rối của dòng chảy xuất phát từ các cơ chế sau: (i) tách dòng phía sau phần tử nhám, tạo vùng xoáy cường bức; (ii) tương tác giữa xoáy nhám và xoáy cuộn chính (roller vortices); (iii) chuyển dịch năng lượng từ xoáy lớn sang xoáy nhỏ, dẫn đến tăng khả năng tiêu năng. Ngược lại, đáy trơn thiếu các cơ chế sinh rối thứ cấp, nên rối phụ thuộc chủ yếu vào mức thay đổi vận tốc giữa dòng chủ và khu nước xoáy, suy giảm chậm làm tăng chiều dài khu nước xoáy để dòng chảy chuyển trạng thái hoàn chỉnh từ dòng chảy xiết sang dòng chảy êm.

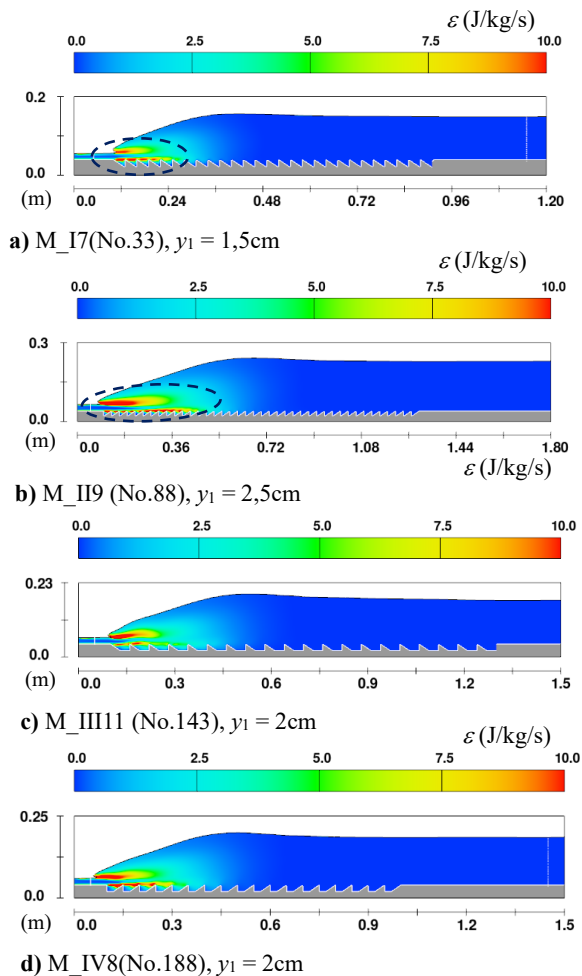
Phân bố k cho thấy đáy nhám nghiên cứu không chỉ làm tăng cường độ rối mà còn làm thay đổi cấu trúc rối trong nước nhảy. So với đáy trơn, nước nhảy trên đáy nhám có vùng rối phát triển mở rộng theo độ sâu và phân bố không gian phức tạp hơn, phản ánh hiệu quả sinh và tiêu rối vượt trội. Điều này giải thích rõ hơn cơ chế gia tăng hiệu quả tiêu năng và rút ngắn chiều dài nước nhảy khi sử dụng đáy nhám.

3.3. Cơ chế và hiệu quả tiêu năng của các nền nhám nghiên cứu

Quá trình tiêu năng thực được đặc trưng bởi tốc độ tiêu tán rối ε (Turbulent dissipation rate, ε - J/kg/s), đại diện cho giai đoạn cuối cùng của quá trình truyền động năng rối từ các xoáy lớn xuống các xoáy nhỏ hơn cho đến khi bị tiêu tán (động năng rối được chuyển

hóa thành nhiệt thông qua tác động của độ nhớt chất lỏng). Các kết quả mô phỏng cho thấy ε đạt giá trị lớn nhất tại các vùng có mức thay đổi vận tốc cao và tại lớp dòng chảy sát đáy nhám được nhận diện rất rõ, nơi các xoáy sinh ra bởi phần tử nhám bị phá vỡ nhanh chóng thành các xoáy nhỏ hơn (xem kết hợp Hình 4 và 6).

Nước nhảy trên đáy nhám nghiên cứu tạo ra các cấu trúc xoáy quay thuận mạnh mẽ, các xoáy này đóng vai trò là nguồn sinh rối chủ đạo, làm gia tăng đáng kể động năng rối k và thúc đẩy quá trình truyền năng lượng từ thang lớn xuống thang nhỏ, dẫn đến tốc độ tiêu tán ε cao hơn. Sự tương tác đồng thời giữa cấu trúc xoáy, k và ε tạo nên cơ chế tiêu năng vượt trội của nước nhảy trên đáy nhám so với đáy trơn.



Hình 6. Phân bố ε trên nền nhám với $Fr_1 = 6,7$

Với các phần tử nhám có mái nghiêng bố trí ngược với hướng dòng chảy như mô hình đáy nhám M_I và M_{III} thì giá trị ε lớn tập trung và liên tục trên một vài hàng nhám đầu của đáy nhám với độ lớn đạt khoảng từ 7,5 đến 10 J/kg/s (như Hình 6a và c). Trong khi đó, với loại đáy nhám M_{II} và M_{IV} thì phân bố không gian của phổ giá trị ε lớn

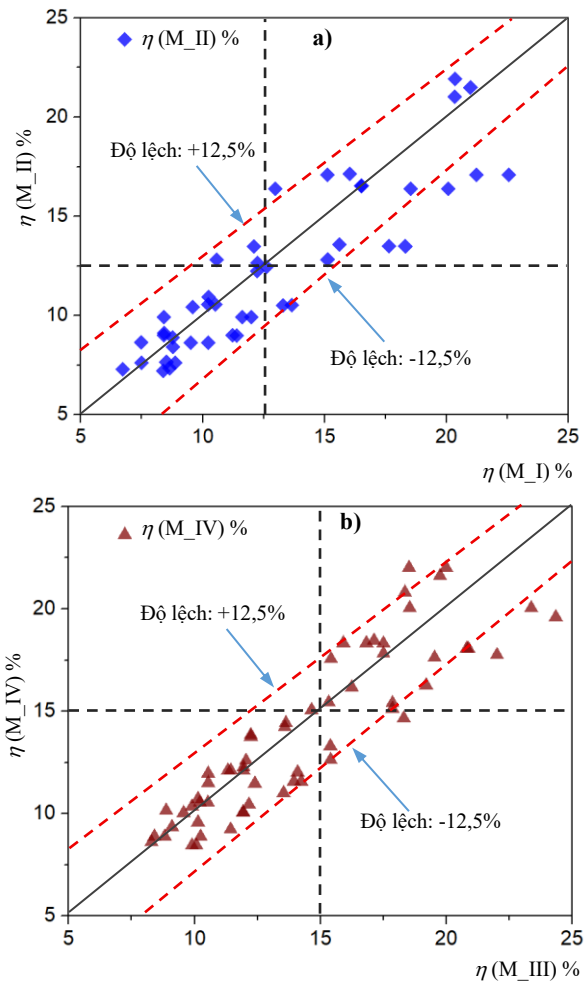
không liên tục, kéo dài xuôi hạ lưu và xuất hiện nhiều điểm cực trị cục bộ trên các hàng nhám. Điều này cho thấy kiểu mô hình đáy nhám M_I và M_{III} có hiệu quả tiêu tán rối tập trung, ổn định tốt hơn cho thiết kế bề tiêu năng so với hai mô hình đáy nhám còn lại.

Nghiên cứu tiến hành phân tích, đánh giá và so sánh hiệu suất tiêu năng $\eta = (E_L - E_{L*}) / E_{L*}$ [25] (E_{L*} , E_L lần lượt là tổn thất năng lượng trên đáy trơn, nhám) giữa từng cặp mô hình đáy nhám nghiên cứu được thể hiện chi tiết trên Hình 7. Đường chéo 45° biểu thị trạng thái hiệu suất tiêu năng tương đương giữa hai mô hình trong mỗi cặp, trong khi các đường gạch đỏ biểu diễn biên độ sai lệch $\pm 12,5\%$. Phân bố và xu thế của các điểm dữ liệu trên đồ thị cho phép đánh giá định lượng mức độ khác biệt về tổn thất năng lượng của từng mô hình đáy nhám, điều mà nghiên cứu [25] chưa làm rõ.

Đối với cặp đáy nhám M_I và M_{II} (Hình 7a), quan sát định lượng cho thấy đa số các điểm dữ liệu nằm dưới đường chéo $\eta(M_I) = \eta(M_{II})$. Điều này cho thấy trong phần lớn các điều kiện dòng chảy khảo sát, hiệu suất tiêu năng của mô hình M_I lớn hơn so với M_{II} . Đặc biệt, nhiều điểm dữ liệu lệch đáng kể về phía dưới đường chéo và tiệm cận biên $-12,5\%$, phản ánh sự khác biệt rõ ràng và có ý nghĩa về mặt thủy lực giữa hai cấu hình đáy nhám.

Về mặt cơ chế, kết quả này phù hợp chặt chẽ với phân tích trường rối và tiêu năng đã trình bày ở các nội dung trước. Mô hình đáy M_{II} có xu hướng tạo ra giá trị k lớn hơn cục bộ tại vùng chân nước nháy và ngay sau các phần tử nhám, cho thấy mức độ kích thích rối ban đầu mạnh. Tuy nhiên, phân bố của tốc độ tiêu tán rối ε trong M_{II} lại mang tính cục bộ, không duy trì liên tục dọc theo đáy (xem Hình 6b), cho thấy một phần đáng kể động năng rối được tích trữ trong các cấu trúc xoáy lớn và trung gian, nhưng chưa được chuyển hóa hiệu quả thành các xoáy nhỏ để mất đi.

Ngược lại, mô hình đáy M_I thể hiện các vùng ε cao phân bố đều, liên tục và tập trung hơn theo phương dòng chảy, đặc biệt trong lớp gần đáy (xem Hình 6a). Các cấu trúc xoáy trong mô hình đáy M_I mặc dù có cường độ Liutex/ Rortex vừa phải, nhưng phân rã nhanh và liên tục, thúc đẩy quá trình chuyển hóa k thành tiêu tán nhớt. Do đó, đáy nhám M_I không phải là mô hình tạo rối mạnh, mà là mô hình tiêu tán rối hiệu quả, dẫn đến hiệu suất tiêu năng tổng thể cao hơn đáy M_{II} , phù hợp với nghiên cứu của nhóm giả T. C. Tỳ và nhóm nghiên cứu [25].



Hình 7. Tổn thất năng lượng qua nước nháy với các mô hình đáy nhám nghiên cứu

Đối với cặp mô hình đáy nhám M_{III} và M_{IV} (Hình 7b), các điểm dữ liệu phân bố gần đường chéo hơn so với cặp mô hình M_I và M_{II} , cho thấy mức độ khác biệt về hiệu suất tiêu năng giữa hai mô hình này nhỏ hơn. Tuy nhiên, vẫn có thể nhận thấy xu thế chủ đạo là các điểm nằm dưới đường chéo, đặc biệt trong vùng η trung bình và cao, chứng tỏ mô hình M_{III} nhìn chung đạt hiệu quả tiêu năng cao hơn M_{IV} .

Phân tích trường rối cho thấy M_{IV} có xu hướng tạo ra k tương đối lớn trong một số trường hợp, song các cấu trúc xoáy sinh ra có mật độ cao và tương tác mạnh với nhau, dẫn đến hiện tượng triệt tiêu xoáy và làm gián đoạn quá trình truyền động năng rời từ các xoáy lớn xuống các xoáy nhỏ hơn. Hệ quả là tốc độ tiêu tán rối ε trong M_{IV} không duy trì được mức cao một cách ổn định và liên tục dọc theo chiều dài nước nháy. Trong khi đó, mô hình M_{III} thể hiện sự cân bằng hợp lý giữa cường độ và sự phân bố của các cấu trúc xoáy quay thực được hình thành đều đặn

phía sau các phần tử nhám, kết hợp với phân bố ε liên tục trong lớp sát đáy. Nhờ đó, đáy nhám M_{III} duy trì, cho phép động năng rối được chuyển hóa hiệu quả thành tiêu tán nhớt, dẫn đến hiệu suất tiêu năng cao và ít biến động hơn so với đáy M_{IV} .

Các kết quả nghiên cứu cũng cung cấp cơ sở khoa học quan trọng cho việc tối ưu hóa thiết kế đáy nhám trong bê tiêu năng, đồng thời hướng tới các cấu hình đáy nhám có khả năng chuyển hóa động năng rối thành tiêu tán nhớt một cách hiệu quả và bền vững.

3.4. Thảo luận

Kết quả nhận diện và phân tích cấu trúc xoáy trong mục 3.1 cho thấy rằng, các xoáy quay thực được xác định bằng phương pháp Liutex/Rortex không chỉ là hệ quả hình học của đáy nhám mà còn là cơ chế trung gian chi phối trực tiếp quá trình tiêu năng và tổn thất năng lượng của nước nhảy. Mỗi liên hệ này có thể được làm rõ thông qua sự tương tác giữa động năng rối k và tốc độ tiêu tán năng lượng rối ε .

Cụ thể, các cấu trúc xoáy quy mô lớn được hình thành tập trung tại vùng chân nước nhảy và phía sau các phần tử nhám đóng vai trò như nguồn phát sinh k sơ cấp. Dưới tác động của đáy nhám, các xoáy này bị kéo giãn, bẻ gãy và phân tách thành các xoáy có quy mô nhỏ hơn, kích hoạt một chuỗi quá trình truyền động năng rối từ các xoáy lớn xuống các xoáy nhỏ hơn. Quá trình này được phản ánh rõ ràng qua sự gia tăng đồng thời của k và ε trong lớp sát đáy nhám.

Phân bố theo không gian của tham số ε cho thấy các vùng tiêu tán năng lượng rối lớn nhất trùng khớp với các khu vực có mật độ xoáy Liutex/Rortex cao, trong khi các vùng chỉ được nhận diện là xoáy theo tiêu chí Q nhưng thiếu chuyển động quay thực lại không đóng góp đáng kể vào tiêu năng. Điều này khẳng định rằng chỉ những cấu trúc xoáy có bản chất quay thực mới là tác nhân hiệu quả chuyển hóa k thành tiêu tán nhớt, qua đó làm suy giảm năng lượng dòng chảy.

Sự khác biệt về tổn thất năng lượng giữa bốn loại mô hình đáy nhám (M_I , M_{II} , M_{III} và M_{IV}) đã được làm rõ và phản ánh mối quan hệ phức tạp giữa cấu trúc xoáy - động năng rối - tiêu tán năng lượng trong nước nhảy. Vì vậy, hiệu quả tiêu năng của nước nhảy đáy nhám không chỉ phụ thuộc vào độ nhám hình học hay cường độ rối tổng thể, mà được quyết định bởi khả năng hình thành, phát triển và phân rã của các cấu trúc xoáy quay thực, vốn được mô tả chính xác thông qua phương pháp Liutex/Rortex. Đây chính là đóng góp mới và có ý nghĩa của nghiên cứu, khi lần đầu tiên thiết lập được mối liên hệ trực

tiếp giữa cấu trúc xoáy - động năng rối - tiêu tán năng lượng và tổn thất năng lượng của nước nhảy trên nền đáy nhám.

4. Kết luận

Nghiên cứu này đã làm rõ vai trò trung tâm của cấu trúc xoáy trong cơ chế tiêu năng của nước nhảy tự do (hoàn chỉnh) trên nền đáy nhám lăng trụ tam giác vuông. Thông qua việc kết hợp tiêu chí Q và phương pháp Liutex/Rortex, các cấu trúc xoáy quay thực đã được phân biệt, nhận diện một cách chính xác và theo dõi sự tiến hóa của chúng trong vùng nước nhảy.

Kết quả nghiên cứu cho thấy tiêu chí Q chỉ phản ánh phạm vi rối tổng quát, trong khi phương pháp Liutex/Rortex cho phép xác định chính xác các xoáy quay thực, các tác nhân trực tiếp tham gia vào quá trình chuyển hóa năng lượng. Sự hình thành của các xoáy quy mô lớn, nhỏ tại chân nước nhảy, quá trình tương tác và phân rã của chúng trong vùng nước nhảy, cùng với sự duy trì xoáy trong lớp gần đáy do tác động của hình học nhám, đã tạo nên một quá trình truyền động năng rối từ các xoáy lớn xuống các xoáy nhỏ hơn cho đến khi bị tiêu tán.

Mỗi liên hệ định lượng giữa các vùng có cường độ xoáy theo Liutex/Rortex cao với các vùng có động năng rối k và tốc độ tiêu tán năng lượng rối ε lớn đã chứng minh rằng hiệu quả tiêu năng của nước nhảy không chỉ phụ thuộc vào mức độ rối tổng thể mà được chi phối bởi khả năng hình thành và duy trì các cấu trúc xoáy quay thực. Trên cơ sở đó, nghiên cứu đề xuất một cách tiếp cận mới trong phân tích và thiết kế các đáy nhám trong công trình tiêu năng, trong đó đặc trưng cấu trúc xoáy được xem là tiêu chí cơ học quan trọng để nâng cao hiệu quả tiêu năng của nước nhảy trong các công trình tiêu năng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] W. H. Hager (1992), *Energy Dissipators and Hydraulic Jump*, Kluwer Academic Publishers.
- [2] Nguyễn Văn Cung và nnk (2015), *Công trình tháo lũ trong đầu mối hệ thống thủy lợi*, NXB Xây dựng.
- [3] H. Rouse, T. Siao, and S. Nagaratnam (1958), *Turbulence characteristics of the hydraulic jump*, Journal of the Hydraulics Division, Vol.84, No.1, pp.1-30.
- [4] N. Rajaratnam (1967), *Hydraulic jumps. Advances in hydrosience*, Vol.4: Elsevier, pp.197-280.
- [5] A. O. Akan (2006), *Open Channel Hydraulics*, Elsevier.

- [6] S. Kucukali and H. Chanson (2008), *Turbulence measurements in the bubbly flow region of hydraulic jumps*, Experimental Thermal and Fluid Science, Vol.33, No.1, pp.41-53.
Doi: 10.1016/j.expthermflusci.2008.06.012
- [7] H. Chanson (2011), *Hydraulic jumps: turbulence and air bubble entrainment*, La Houille Blanche, No.3, pp.5-16.
Doi: 10.1051/lhb/2011026.
- [8] H. Wang (2014), *Turbulence and air entrainment in hydraulic jumps*, PhD thesis.
- [9] H. S. Kim, S. Choi, M. Park, and Y. Ryu (2023), *Flow turbulence and pressure fluctuations in a hydraulic jump*, Sustainability, Vol.15, No.19, pp.1-16.
Doi: 10.3390/su151914246.
- [10] A. Witt, J. Gulliver, and L. Shen (2015), *Simulating air entrainment and vortex dynamics in a hydraulic jump*, International Journal of Multiphase Flow, Vol.72, pp.165-180.
Doi: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2015.02.012.
- [11] V. Jesudhas, R. Balachandar, V. Roussinova, and R. Barron (2018), *Turbulence characteristics of classical hydraulic jump using DES*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol.144, No.6.
Doi: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001427
- [12] T. C. Trieu and T. C. Ty (2023), *Prediction of the Vortex Evolution and Influence Analysis of Rough Bed in a Hydraulic Jump with the Omega-Liutex Method*, Tehnicki vjesnik - Technical Gazette, Vol.30, No.6, pp.1761-1768.
Doi: 10.17559/tv-20230206000327.
- [13] T. C. Ty (2023), *Effects of right triangular and rectangular prism rough beds on hydraulic jumps using the CFD Method*, PhD thesis, Sichuan University.
- [14] S. Ead and N. Rajaratnam (2002), *Hydraulic jumps on corrugated beds*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol.128, No.7, pp.656-663.
Doi:10.1061/(ASCE)07339429(2002)128:7(656).
- [15] N. D. Tokyay (2005), *Effect of channel bed corrugations on hydraulic jumps*, In Impacts of Global Climate Change, pp.1-9.
- [16] F. Izadjoo and M. Shafai-Bejestan (2007), *Corrugated bed hydraulic jump stilling basin*, Journal of Applied Sciences, Vol.7, No.8, pp.1164-1169.
Doi: 10.3923/jas.2007.1164.1169.
- [17] A. Abbaspour, A. H. Dalir, D. Farsadizadeh, and A. Sadraddini (2009), *Effect of sinusoidal corrugated bed on hydraulic jump characteristics*, Journal of Hydro-environment Research, Vol.3, No.2, pp.109-117.
Doi: 10.1016/j.jher.2009.05.003.
- [18] A. Abbaspour, D. Farsadizadeh, A. H. DALIR, and A. A. SADRADDINI (2009), *Numerical study of hydraulic jumps on corrugated beds using turbulence models*, Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences, Vol.33, No.1, pp.61-72.
Doi: 10.3906/muh-0901-7.
- [19] M. S. Bejestan and K. Neisi (2009), *A new roughened bed hydraulic jump stilling basin*, Asian journal of applied sciences, Vol.2, No.5, pp.436-445.
Doi: 10.3923/ajaps.2009.436.445.
- [20] I. H. Elsebaie and S. Shabayek (2010), *Formation of hydraulic jumps on corrugated beds*, International Journal of Civil T Environment al Engineering IJCEE-IJENS, Vol.10, No.1, pp.37-47.
- [21] H. Samadi-Boroujeni, M. Ghazali, B. Gorbani, and R. Fattahi Nafchi (2013), *Effect of triangular corrugated beds on the hydraulic jump characteristics*, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol.40, No.9, pp.841-847.
Doi: 10.1139/cjce-2012-0019.
- [22] S. A. JALIL, S. A. SARHAN, and S. M. ALI (2017), *Characteristics of hydraulic jump on a striped channel Bed*, Journal of Duhok University, pp.654-661.
doi: 10.26682/sjuod.2017.20.1.57.
- [23] S. Gu, F. Bo, M. Luo, E. Kazemi, Y. Zhang, and J. Wei (2019), *SPH Simulation of Hydraulic Jump on Corrugated Riverbeds*, Applied Sciences, Vol.9, No.3, pp.1-28.
Doi: 10.3390/app9030436.
- [24] A. Ghaderi, M. Dasineh, F. Aristodemo, and A. Ghahramanzadeh (2020), *Characteristics of free and submerged hydraulic jumps over different macroroughnesses*, Journal of Hydroinformatics, Vol.22, No.6, pp.1554-1572.
Doi: 10.2166/hydro.2020.298.

- [25] T. C. Ty, Z. J. Min, and T. C. Trieu (2024), *Influence of Right Triangular Prism Rough Beds on Hydraulic Jumps*, Applied Sciences, Vol.14, No.2, pp.1-19.
Doi: <https://doi.org/10.3390/app14020594>.
- [26] T. C. Ty, T. C. Trieu (2025), *Numerical and analysis effects of rectangular prism rough beds on hydraulic jumps in open channels*, AIP Advances, Vol.15, No.7, pp.1-10.
Doi: <https://doi.org/10.1063/5.0267793>.
- [27] Trịnh Công Tý và nnk (2022), *Mô phỏng và phân tích diễn tiến cấu trúc xoáy trong nước nhảy trên đáy nhám sử dụng phương pháp Liutex/Rortex*, Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ XI, tr.374-382.
- [28] J. Jeong and F. Hussain (1995), *On the identification of a vortex*, Journal of fluid mechanics, Vol.285, pp.69-94.
- [29] C. Liu et al. (2019), *Third generation of vortex identification methods: Omega and Liutex/Rortex based systems*, Journal of Hydrodynamics, Vol.31, No.2, pp.205-223.
Doi: 10.1007/s42241-019-0022-4.
- [30] V. Yakhot, S. Orszag, S. Thangam, T. Gatski, and C. Speziale (1992), *Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique*, Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, Vol.4, No.7, pp.1510-1520.
Doi: 10.1063/1.858424.

Ngày nhận bài:	08/02/2026
Ngày nhận bản sửa:	20/03/2026
Ngày duyệt đăng:	25/03/2026