

**NGHIÊN CỨU DAO ĐỘNG CỦA ĐƯỜNG RAY XE LỬA
 TRÊN NỀN ĐÀN HỒI KHI CÓ ĐOÀN TÀU CHẠY**
**STUDYING THE RAILROAD TRACK'S OSCILLATION ON ELASTIC
 FOUNDATION WHEN THE TRAIN IS RUNNING**

NGUYỄN HỮU ĐÌNH*, VŨ THỊ PHƯƠNG THẢO, PHẠM THỊ THÚY

Khoa Cơ sở cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

**Email liên hệ: huudinhcohoc@vimaru.edu.vn*

Tóm tắt

Dao động của đường ray xe lửa trên nền đàn hồi khi có đoàn tàu chạy được tác giả xây dựng bài toán bằng mô hình nghiên cứu dao động của dầm Euler - Bernoulli trên nền đàn hồi chịu tác dụng của lực $F_0 = \text{const}$ di động với vận tốc v . Bài báo đã thiết lập được phương trình dao động của dầm sử dụng nguyên lý D'Alembert. Xác định được độ võng của dầm và tần số dao động riêng của dầm. Sử dụng phần mềm matlab tính toán và mô phỏng số.

Từ khóa: *Dao động của dầm, dao động của dầm trên nền đàn hồi.*

Abstract

Oscillation of train tracks on elastic foundation when the train is running, the author constructs the problem by studying the Euler-Bernoulli beam on elastic foundation under the effect of force $F_0 = \text{const}$ moved with velocity v . The article sets up the beam oscillation equation using the D'Alembert principle. Determine the deflection of the beam and the specific frequency of the beam oscillation. Using matlab software to calculate and simulate numbers.

Keywords: *Vibration of the beam, Vibration of the beam on elastic foundation.*

1. Mở đầu

Đường ray là một yếu tố cơ bản trong vận tải đường sắt, giúp định hướng cho tàu hỏa chạy mà không cần quan tâm nhiều đến việc bề lái như các phương tiện giao thông khác. Khi một đoàn tàu chạy qua, đường ray sẽ chịu một áp lực rất lớn vì các đoàn tàu có thể có tổng khối lượng lên đến hàng chục ngàn tấn. Nếu đường ray dao động mạnh với áp lực của đoàn tàu chạy trên rất lớn có thể làm đường ray cong vênh hoặc biến dạng làm mất an toàn cho hành khách cũng như hàng hóa trên tàu, thậm chí có thể làm tàu bị lật. Dao động của đường ray cũng gây ra tiếng ồn lớn cũng như lực ma sát của tàu lớn. Do vậy nhằm đảm bảo an toàn cho đoàn tàu cũng như hành khách và hàng hóa trên tàu thì việc nghiên

cứu dao động của đường ray là rất cần thiết. Trong nội dung bài báo này, tác giả coi dao động của đường ray xe lửa khi có đoàn tàu chạy được đưa về xây dựng mô hình dao động của dầm trên nền đàn hồi khi có tải trọng di động với vận tốc không đổi.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng nguyên lý D'Alembert để thiết lập phương trình dao động của dầm trên nền đàn hồi khi có tải trọng di động khác với các phương pháp trước đây có nhiều tác giả nghiên cứu sử dụng phần tử hữu hạn[8]. Từ phương trình dao động của dầm tính toán được nghiệm giải tích về độ võng của dầm và tần số dao động. Sử dụng phần mềm Matlab tính toán số.

3. Xây dựng mô hình dao động của đường ray xe lửa

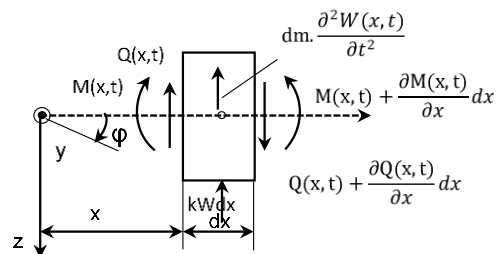
3.1. Nghiên cứu dao động tự do của dầm trên nền đàn hồi với hệ số cứng phân bố k

a. Thiết lập phương trình dao động

Để thiết lập phương trình vi phân dao động uốn của dầm, tưởng tượng tách một phần tử nhỏ của dầm có chiều dài dx (Hình 1). Áp dụng nguyên lý d'Alembert. Từ điều kiện cân bằng lực theo phương z ta có.

$$-dm \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx - Q - kWdx = 0 \quad (1)$$

Trong đó $dm = \mu(x)dx$, với $\mu(x)$ là khối lượng một đơn vị dài của dầm:



Hình 1. Lực tác dụng trên một phần tử của dầm

Từ điều kiện cân bằng mômen các lực, ta nhận được phương trình:

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - Q \frac{dx}{2} - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} = 0 \quad (2)$$

Từ phương trình (2) ta thu được:

$$Q - \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Trong bài toán coi đường ray là dầm Euler-Bernoulli, do bỏ qua lực quán tính quay và biến dạng trượt của trục dầm ta có:

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial x}; M = -EI(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}] \quad (4)$$

Thế (4) vào phương trình (1) ta được phương trình dao động của dầm:

$$\mu(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + kW + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}] = 0 \quad (5)$$

Đối với dầm đồng chất, thiết diện không đổi phương trình dao động tự do của dầm trên nền đàn hồi thu được là:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{k}{\mu} W = 0 \quad (6)$$

b. Nghiệm tổng quát của phương trình dao động

Áp dụng phương pháp Bernoulli, tìm nghiệm của phương trình (6) dưới dạng:

$$W(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(t) \quad (7)$$

Thế (7) vào phương trình (6) ta có:

$$-\frac{\ddot{q}_i(t)}{q_i(t)} = \frac{EI}{\mu} \frac{X_i^{(IV)}(x)}{X_i(x)} + \frac{k}{\mu} = \omega^2 \quad (8)$$

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (9)$$

$$X^{(IV)}(x) - \left(\omega^2 - \frac{k}{\mu}\right) \frac{\mu}{EI} X(x) = 0 \quad (10)$$

Với $\lambda^4 = \left(\omega^2 - \frac{k}{\mu}\right) \frac{\mu}{EI} l^4$ Phương trình (10) được viết lại:

$$X^{(IV)}(x) - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 X(x) = 0 \quad (11)$$

Nghiệm của phương trình (11) được tìm dưới dạng

$$X(x) = C_1 \cos\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + C_2 \sin\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + C_3 \cosh\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + C_4 \sinh\left(\lambda \frac{x}{l}\right) \quad (12)$$

Trong đó C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định từ điều kiện biên. Nghiệm của phương trình (9) tìm dưới dạng:

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (13)$$

Trong đó A, B là các hằng số được xác định từ điều kiện đầu.

c. Xét dao động uốn tự do của dầm trên nền đàn hồi hai đầu tựa bản lề

Đối với bài toán dao động uốn tự do của dầm hai đầu tựa bản lề các điều kiện biên là độ võng và mômen

uốn đều triệt tiêu ở hai biên $x = 0, x = l$.

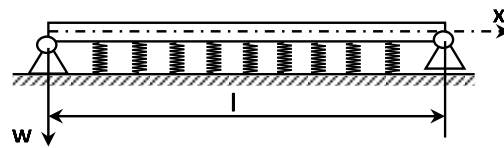
$$X(0)=0; X(l)=0; X''(0) = 0; X''(l) = 0 \quad (14)$$

Từ điều kiện trên ta có $C_1 = C_3 = C_4 = 0$, mặt khác để $C_2 \neq 0$. Ta có phương trình đặc trưng:

$$\sin \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = n\pi \quad \text{với } n = 1, 2, 3 \dots \quad (15)$$

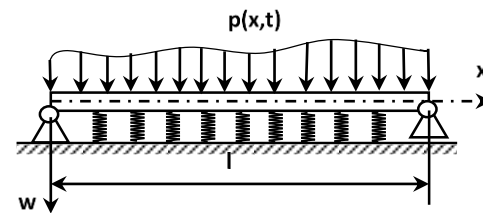
Hàm riêng bây giờ được viết dưới dạng $X = C_2 \sin \lambda \frac{x}{l}$

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\mu} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + \frac{k}{\mu} \quad (16)$$



Hình 2. Dao động tự do của dầm trên nền đàn hồi

3.2. Nghiên cứu dao động uốn của dầm đồng chất tiết diện không đổi đặt trên nền đàn hồi tuyến tính với hệ số cứng phân bố k, chịu tác dụng của lực phân bố p(x,t)



Hình 3. Dầm chịu lực phân bố trên nền đàn hồi

Phương trình dao động của dầm có dạng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{k}{\mu} w = \frac{1}{\mu} p(x, t) \quad (17)$$

Giả sử bài toán này cho lực phân bố $p(x,t) = F_0 \cos \Omega t$, nghiệm bình ổn của phương trình trên được tìm dưới dạng $w(x, t) = F_0 \cos \Omega t$. Thế vào phương trình (17) ta thu được:

$$X^{IV} - \xi^4 X = \frac{F_0}{EI}$$

Với:

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{\mu}{EI} \left(\Omega^2 - \frac{k}{\mu}\right)} \quad (18)$$

Nghiệm của phương trình (18) có dạng:

$$X(x) = C_1 \cos \xi x + C_2 \sin \xi x + C_3 \cosh \xi x + C_4 \sinh \xi x - \frac{F_0}{\mu \left(\Omega^2 - \frac{k}{\mu}\right)}$$

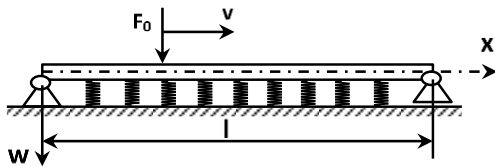
Từ các điều kiện biên $X(0) = X''(0) = X(l) = X''(l) = 0$.
 Ta xác định được:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_3 = \frac{F_0}{2\mu(\Omega^2 - \frac{k}{\mu})} \\ C_2 &= \frac{F_0}{2\mu(\Omega^2 - \frac{k}{\mu})} \operatorname{tg} \left(\xi \frac{l}{c} \right) \\ C_4 &= -\frac{F_0}{2\mu(\Omega^2 - \frac{k}{\mu})} \operatorname{tgh} \left(\xi \frac{l}{c} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Vậy nghiệm bình ôn của phương trình trên là:

$$w = \frac{F_0}{\mu(\Omega^2 - \frac{k}{\mu})} \left\{ \frac{\cos \xi \left(\frac{l}{2} - x \right)}{2 \cos \left(\frac{\xi l}{2} \right)} + \frac{\cosh \xi \left(\frac{l}{2} - x \right)}{2 \cosh \left(\frac{\xi l}{2} \right)} - 1 \right\} \cos \Omega t \quad (20)$$

3.3. Một toa xe chạy đều trên đường ray thẳng được mô hình hóa là một lực $F_0 = \text{const}$ chuyển động với vận tốc v không đổi dọc theo một dầm đồng chất trên nền đàn hồi tuyến tính với hệ số k



Hình 4. Dầm chịu tải trọng di động trên nền đàn hồi

Tương tự ta cũng thu được phương trình dao động của dầm. Sử dụng hàm Delta-Dirac, tải trọng $p(x,t)$ trong bài toán này có dạng $p(x,t) = F_0 \delta(x - vt)$.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{k}{\mu} w = \frac{F_0}{\mu} \delta(x - vt) \quad (21)$$

Áp dụng phương pháp Bernoulli, tìm nghiệm của phương trình (21) dưới dạng:

$$W(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(t) \quad (22)$$

Thế (22) vào phương trình (21) ta có:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_i(t) + \left(\frac{EI}{\mu} \frac{X_i^{(IV)}(x)}{X_i(x)} + \frac{k}{\mu} \right) q_i(t) \right] X_i(x) = \frac{F_0}{\mu} \delta(x - vt) \quad (23)$$

Phương trình (23) suy ra:

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)] X_i(x) = \frac{F_0}{\mu} \delta(x - vt) \quad (24)$$

Nhân cả hai vế của phương trình này với hàm riêng $X_n(x)$ rồi lấy tích phân dọc theo chiều dài của dầm.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)] \int_0^l X_i(x) X_n(x) dx &= \\ = \frac{F_0}{\mu} \int_0^l \delta(x - vt) X_n(x) dx & \quad (25) \end{aligned}$$

Do điều kiện trực giao của các hàm riêng ta suy ra:

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{F_0 \int_0^l \delta(x - vt) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx} \quad (26)$$

Đối với dầm chịu liên kết hai đầu bản lề $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ Do đó $\int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{l}{2}$. Do tính chất của hàm Delta-Dirac ta có:

$$\begin{aligned} \frac{F_0}{\mu} \int_0^l \delta(x - vt) X_n(x) dx &= \frac{F_0}{\mu} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \delta(x - vt) dx \\ &= \frac{F_0}{\mu} \sin \left(\frac{n\pi v}{l} t \right) = \frac{F_0}{\mu} \sin \frac{n\pi}{l} vt \end{aligned} \quad (27)$$

Phương trình (26) được viết lại như sau:

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{2F_0}{\mu l} \sin \frac{n\pi}{l} vt \quad (28)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (28) là:

$$\begin{aligned} q_n(t) &= A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \\ &+ \frac{2F_0}{\mu l \left(\omega_n^2 - \left(\frac{n\pi}{l} v \right)^2 \right)} \sin \frac{n\pi}{l} vt \end{aligned}$$

Các hằng số A_n và B_n được xác định từ điều kiện đầu. Giả sử cho điều kiện đầu:

$$W_0(x) = W(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(0) = 0$$

$$v_0(x) = \frac{\partial W(x, 0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) \dot{q}_i(0) = 0$$

Do tính chất trực giao của các hàm riêng, từ điều kiện đầu ta suy ra: $q_n(0) = 0, \dot{q}_n(0) = 0$ ta xác định được A_n, B_n :

$$A_n = 0, \quad B_n = -\frac{2F_0 \frac{n\pi v}{l}}{\mu l \omega_n \left(\omega_n^2 - \left(\frac{n\pi}{l} v \right)^2 \right)} \quad (29)$$

Vậy ta xác định được độ võng của dầm có dạng:

$$W(x,t) = \frac{2F_0}{\mu l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{l} vt - \frac{n\pi}{\omega_n} \sin \omega_n t}{\omega_n^2 - \left(\frac{n\pi}{l} v \right)^2} \quad (30)$$

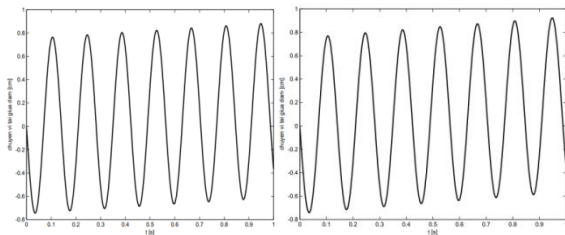
Với tần số dao động riêng $\omega_n^2 = \frac{EI}{\mu} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 + \frac{k}{\mu}$ và

tần số dao động cưỡng bức $\Omega_n = \frac{n\pi v}{l}$.

4. Áp dụng số liệu mô phỏng số

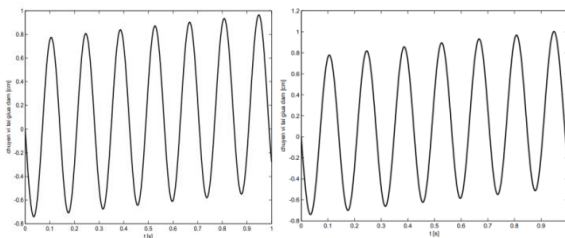
Xét đường ray xe lửa thẳng có chiều dài $L = 100$ m, độ cứng uốn trung bình $\bar{EI} = 54 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$, khối lượng trên một đơn vị dài trung bình $\mu = 750 \text{ kg/m}$. Xe lửa được coi là một lực $F = 4000 \text{ N}$ chuyển động với vận tốc v không đổi dọc theo dầm đồng chất trên nền

đàn hồi tuyến tính với hệ số $k = 1,5 \cdot 10^6 \text{N/m}^2$. Ta xác định được tần số dao động riêng đầu tiên của dầm tựa khớp là $\omega_1 = 44.7221 \text{rad/s}$.



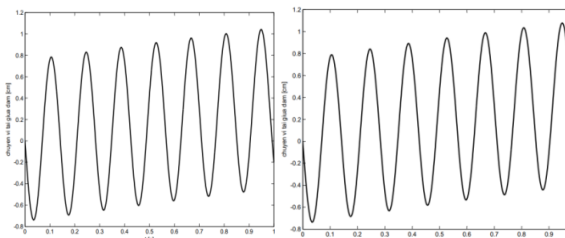
Chuyển vị giữa dầm với $v = 30 \text{ km/h}$

Chuyển vị giữa dầm với $v = 40 \text{ km/h}$



Chuyển vị giữa dầm với $v = 50 \text{ km/h}$

Chuyển vị giữa dầm với $v = 60 \text{ km/h}$



Chuyển vị giữa dầm với $v = 70 \text{ km/h}$

Chuyển vị giữa dầm với $v = 80 \text{ km/h}$

Hình 5. Chuyển vị tại giữa dầm với các vận tốc đi động khác nhau

Vận tốc đi động được coi là vận tốc của tàu chạy với tốc độ 30km/h, 40km/h, 50km/h, 60km/h, 70 km/h, 80km/h sử dụng phần mềm matlab cho ta biết được chuyển vị tại giữa của dầm. Qua đồ thị cho ta thấy với vận tốc càng cao thì chuyển vị tại giữa dầm càng lớn. Tác giả thấy rằng kết quả chương trình đúng với suy luận thực tế, với khối lượng của tàu rất lớn chạy trên dầm đàn hồi với tốc độ cao thì chuyển vị, dao động của dầm sẽ càng lớn. Dao động của dầm có thể xảy ra hiện tượng cộng hưởng khi tần số $\omega_k = \Omega_n$.

5. Kết luận

Bài báo đã nghiên cứu dao động của đường ray xe lửa khi có tàu chạy. Trong bài toán này đưa về nghiên cứu dao động của dầm trên nền đàn hồi khi có tải trọng đi động với vận tốc không đổi. Tác giả thiết lập được phương trình dao động của dầm trên nền đàn hồi với tải trọng đi động sử dụng nguyên lý D’alembert, tính toán được tần số dao động của dầm và chuyển vị của dầm. Tác giả áp dụng số sử dụng phần mềm matlab để

tính toán với các vận tốc đi động khác nhau cho kết quả. Nếu vận tốc chạy tàu càng nhanh trong cùng một thời gian thì chuyển vị tại giữa dầm càng lớn. Do vậy, vận tốc chạy tàu càng lớn thì đường ray dao động càng mạnh.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số **DT20-21.89**.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Văn Khang, Thái Mạnh Cầu, Vũ Văn Khiêm, Nguyễn Nhật Lê. *Bài tập dao động kỹ thuật*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2002.
- [2] Nguyễn Văn Khang. *Dao động kỹ thuật*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1998
- [3] Nguyễn Văn Khang. *Động lực học hệ nhiều vật*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2007.
- [4] Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Nhật Lê: *Bài tập cơ học Tập 1 (in lần thứ 16)*. NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội 2011.
- [5] Đỗ Sanh, Lê Doãn Hồng. *Bài tập cơ học Tập 2 (in lần thứ 13)*. NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội 2011.
- [6] Hoàng Mạnh Cường, Nguyễn Hữu Đình, Phạm Thị Thúy: *Cơ học lý thuyết*. NXB Hàng hải, Hải Phòng. 2018.
- [7] Nguyễn Hữu Đình, Vũ Xuân Trường. *Nghiên cứu ảnh hưởng của gió, động đất tới dao động của tòa nhà cao tầng*, Tạp chí khoa học và công nghệ Trường Đại học sư phạm kỹ thuật Hưng Yên. Số 23 tháng 9/2019.
- [8] Nguyễn Duy Hưng, Tạ Duy Hiên, Nguyễn Trung Kiên. *Nghiên cứu dao động của dầm trên nền đàn hồi chịu khối lượng đi động xét đến đặc trưng ngẫu nhiên của hệ bằng mô phỏng Monte Carlo*, Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, Hà Nội, tập 3, 8-9/12/2017.

Ngày nhận bài:	05/3/2021
Ngày nhận bản sửa:	19/3/2021
Ngày duyệt đăng:	29/3/2021