TẠP CHÍ ISSN: 1859-316X
KHOA HỌC CÔNG NGHỆ HÀNG HẢI
JOURNAL OF MARINE SCIENCE AND TECHNOLOGY

XÂY DỰNG MÔ HÌNH PHI TUYẾN MÔ TẢ SỰ PHỤ THUỘC CỦA BIẾN DẠNG VÀO ỨNG SUẤT ĐỐI VỚI VẬT LIỆU TRỰC HƯỚNG

BUILDING A NONLINEAR MODEL DESCRIBING THE DEPENDENCE OF DEFORMATION ON STRESS FOR ORTHOTROPIC MATERIALS

NGUYỄN SỸ TOÀN

Khoa Cơ sở - Cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

Email liên hệ: toanns.cscb@vimaru.edu.vn

Tóm tắt

Dựa trên đặc điểm của thế đàn hồi Gibbs đối với các quá trình biến dạng đẳng nhiệt thuận nghịch của vật liệu đàn hồi trực hướng, bài báo này đã xây dựng mô hình phi tuyến tính bậc hai một cách đầy đủ để mô tả sự phụ thuộc của biến dạng vào ứng suất trong các quá trình kéo, nén và cắt. Mô hình này chứa 18 tham số vật liệu trong đó có 9 tham số của thành phần tuyến tính tương tự như định luật Hooke và 9 tham số bổ sung trong thành phần phi tuyến bậc hai. Bài báo cũng đưa ra sơ đồ thực nghiệm cần thiết để xác định tất cả các tham số đã nêu của mô hình. Từ các dữ liệu thực nghiệm đã công bố đối với vật liệu thuỷ tinh hữu cơ, các tham số của mô hình được tính toán.

Từ khóa: *Mô hình phi tuyến, vật liệu dị hướng, vật liệu trực hướng, thế đàn hồi Gibbs, tham số vật liệu.*

Abstract

Based on the characteristics of the Gibbs elastic potential for reversible isothermal deformation processes of orthotropic elastic materials, this paper has built a complete second-order nonlinear model to describe the dependence of deformation on stress in the tensile, compression and shear processes. This model contains 18 material parameters, including 9 parameters of the linear component similar to Hooke's law and 9 additional parameters in the second-order nonlinear component. The paper also provides the necessary experimental diagram to determine all the stated parameters of the model. From the published experimental data for organic glass materials, the parameters of the model are calculated.

Keywords: *Nonlinear models, anisotropic materials, orthotropic materials, Gibbs elastic potential, material parameters.*

1. Mở đầu

Vật liệu composite được sử dụng rộng rãi trong các ngành công nghiệp khác khác nhau chẳng hạn như đóng tàu, cơ khí, chế tạo máy,… Cùng với những nghiên cứu tích cực về công nghệ vật liệu, nhiều vật liệu composite hiện đại thể hiện tính chất đàn hồi phi tuyến tính ngay cả với những biến dạng nhỏ. Những vật liệu này cũng có tính dị hướng mà cụ thể là tính trực hướng. Mô hình tuyến tính cổ điển của một vật thể trực hướng dưới dạng định luật Hooke thường không mô tả đầy đủ mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của những vật liệu dạng này, đặc biệt là nó không thể hiện được phản ứng khác nhau của vật liệu dưới tác động của ứng suất kéo và ứng suất nén. Do đó, cần thiết phải xây dựng các mô hình toán học mới mô tả đầy đủ đặc tính đàn hồi phi tuyến của vật liệu dị hướng nói chung và vật liệu trực hướng nói riêng.

Nhiều thí nghiệm đã chỉ ra rằng phản ứng của vật liệu đối với ứng suất kéo và nén là khác nhau đáng kể. Để mô tả và mô hình hóa hành vi này, một số lý thuyết đàn hồi đa mô-đun đã được đề xuất vào nửa sau của thế kỷ 20 như các công trình của S.A. Ambartsumyan và A.A. Khachatryan, L.A. Tolokonnikova, N.M. Matchenko, G.V. Brigadirova, E.V. Lomakina, Yu.N. Rabotnova,…[1-4].

Các mô hình phức tạp hơn của vật liệu trực hướng đàn hồi có xét đến mối quan hệ phi tuyến giữa ứng suất và biến dạng, đã được đề xuất trong công trình của N.M. Matchenko, A.A. Trescheva, E.V. Lomakin và B.N. Fedulova, R.M. Jones, H.S. Morgan, D.A.R. Nelson, H.T. Hahn và S.W. Tsai [5-7].

Do thực tế là những mô hình đã biết thể hiện mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng đối với vật liệu đàn hồi trực hướng nhìn chung là chưa đầy đủ. Chúng hoặc là tuyến tính hoặc là tuyến tính từng phần nên việc phát triển các mô hình phi tuyến đối với những vật liệu này là phù hợp.

Việc xác định các tham số vật liệu có trong mô hình dựa trên dữ liệu thực nghiệm được biết đến từ tài liệu [8].

TẠP CHÍ ISSN: 1859-316X
KHOA HỌC CÔNG NGHỆ HÀNG HẢI
JOURNAL OF MARINE SCIENCE AND TECHNOLOGY

2. Mô hình phi tuyến đối với vật liệu trực hướng

Để mô tả trạng thái biến dạng, người ta thường sử dụng các tensor biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ và tensor ứng suất $\mathbf{S}$. Đối với vật liệu trực hướng, tensor biến dạng có ba bất biến tuyến tính [9]:

$$\text{э}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

$$\text{э}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}),$$

$$\text{э}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \tag{1}$$

và ba bất biến bậc hai:

$$s_{(1)}^2 = \varepsilon_{12}^2, \quad s_{(2)}^2 = \varepsilon_{23}^2, \quad s_{(3)}^2 = \varepsilon_{31}^2. \tag{2}$$

Các bất biến của tensor ứng suất được xác định tương tự:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{11} + S_{22} + S_{33}),$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2S_{33} - S_{11} - S_{22}),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{11} - S_{22}), \tag{3}$$

$$t_{(1)}^2 = S_{12}^2, \quad t_{(2)}^2 = S_{23}^2, \quad t_{(3)}^2 = S_{31}^2. \tag{4}$$

Một trong những cách tiếp cận khả thi để xây dựng các mối quan hệ giữa biến dạng và ứng suất của vật liệu đàn hồi dị hướng phi tuyến trong các quá trình biến dạng đẳng nhiệt thuận nghịch là xuất phát từ thế đàn hồi Gibbs. Từ sự phụ thuộc giữa các thành phần của biến dạng và ứng suất, việc sử dụng dạng thế Gibbs đề xuất trong [10]:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{2} c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta)\sigma_\alpha\sigma_\beta + \sum_{\gamma=1}^{3} D^{\gamma}(t_{(\gamma)}^2)t_{(\gamma)}^2$$

Trong đó: $c^{\alpha\beta}$ chỉ phụ thuộc vào các bất biến tuyến tính của tensor ứng suất còn $D^{(\gamma)}$ chỉ phụ thuộc và các bất biến bậc hai tương ứng. Tức là $c^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta)$ và $D^{\gamma} = D^{\gamma}(t_{(\gamma)}^2)$.

Để xây dựng hệ thức bậc hai, ta xác định sự phụ thuộc của $c^{\alpha\beta}$ vào các bất biến tuyến tính của tensor ứng suất dưới dạng:

$$c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = c_0^{\alpha\beta} + c_1^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$$

và:

$$D^{\gamma}(t_{(\gamma)}^2) = D_0^{(\gamma)} + D_1^{(\gamma)}t_{(\gamma)}$$

Theo đó, sự phụ thuộc giữa các bất biến của tensor biến dạng và tensor ứng suất (1) - (4) được viết dưới dạng:

$$\begin{aligned}
\text{э}_0 &= \left(c_0^{00} + 3c_1^{00}\sigma_0 + 6c_2^{00}\sigma_0^2\right)\sigma_0 + \\
&+\left(c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_0 + c_1^{01}\sigma_1\right)\sigma_1 + \\
&+\left(c_0^{02} + 2c_1^{02}\sigma_0 + c_1^{02}\sigma_2\right)\sigma_2, \\
\text{э}_1 &= \left(c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_1 + c_1^{01}\sigma_0\right)\sigma_0 + \\
&+\left(c_0^{11} + 3c_1^{11}\sigma_1\right)\sigma_1 + \\
&+\left(c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_1 + c_1^{12}\sigma_2\right)\sigma_2, \\
\text{э}_2 &= \left(c_0^{02} + 2c_1^{02}\sigma_2 + c_1^{02}\sigma_0\right)\sigma_0 + \\
&+\left(c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_2 + c_1^{12}\sigma_1\right)\sigma_1 + \\
&+\left(c_0^{22} + 3c_1^{22}\sigma_2\right)\sigma_2, \\
s_{(1)} &= 2\left(D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)}t_{(1)}\right)t_{(1)}, \\
s_{(2)} &= 2\left(D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)}t_{(2)}\right)t_{(2)}, \\
s_{(3)} &= 2\left(D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)}t_{(3)}\right)t_{(3)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Trong đó: $c_0^{\alpha\beta}$, $c_1^{\alpha\beta}$, $D_0^{(\gamma)}$, $D_1^{(\gamma)}$ là các tham số đàn hồi của vật liệu. Hệ thức (5) là mô hình đàn hồi bậc hai cho vật liệu trực hướng. Nếu các tham số $c_1^{\alpha\beta} = 0$, $D_1^{(\gamma)} = 0$ thì hệ thức (5) trùng với định luật Hooke tổng quát cho vật liệu trực hướng.

Thế các biểu thức của bất biến (1) - (4) vào hệ thức (5) ta thu được sự phụ thuộc theo từng thành phần của tensor biến dạng và tensor ứng suất:

$$\varepsilon_{11} = A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} +$$

$$+B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 +$$

$$+B_{1112}S_{11}S_{22} + B_{1113}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33},$$

$$\varepsilon_{22} = A_{2211}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} +$$

$$+B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 +$$

$$+B_{2212}S_{11}S_{22} + B_{2213}S_{11}S_{33} + B_{2223}S_{22}S_{33},$$

$$\varepsilon_{33} = A_{3311}S_{11} + A_{3322}S_{22} + A_{3333}S_{33} +$$

$$+B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 +$$

$$+B_{3312}S_{11}S_{22} + B_{3313}S_{11}S_{33} + B_{3323}S_{22}S_{33},$$

$$\varepsilon_{12} = 2\left(D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)}|S_{12}|\right)S_{12},$$

$$\varepsilon_{23} = 2\left(D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)}|S_{23}|\right)S_{23},$$

$$\varepsilon_{31} = 2\left(D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)}|S_{31}|\right)S_{31}. \tag{6}$$

Các thành phần của tenxơ biến dạng phải thỏa mãn điều kiện tồn tại thế Gibbs:

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}} \tag{7}$$

Điều kiện (7) dẫn đến sự phụ thuộc giữa các tham số của mô hình:

$$\begin{aligned} &A_{1122} = A_{2211},\ \ A_{1133} = A_{3311},\\ &A_{2233} = A_{3322},\ \ B_{2212} = 2B_{1122},\\ &B_{1112} = 2B_{2211},\ \ B_{1123} = B_{2213},\\ &B_{3313} = 2B_{1133},\ \ B_{1113} = 2B_{3311},\\ &B_{1113} = 2B_{3311},\ \ B_{3323} = 2B_{2233},\\ &B_{2223} = 2B_{3322},\ \ B_{2213} = B_{3312}. \end{aligned} \tag{8}$$

Kết hợp với các đẳng thức (8), các biểu thức (6) được rút gọn thành:

$$\varepsilon_{11} = A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} +$$

$$+B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 +$$

$$+2B_{2211}S_{11}S_{22} + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33},$$

$$\varepsilon_{22} = A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} +$$

$$+B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 +$$

$$+2B_{1122}S_{11}S_{22} + B_{1123}S_{11}S_{33} + 2B_{3322}S_{22}S_{33},$$

$$\varepsilon_{33} = A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33} +$$

$$+B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 +$$

$$+B_{1123}S_{11}S_{22} + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + 2B_{2233}S_{22}S_{33},$$

$$\varepsilon_{12} = 2\left(D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)}|S_{12}|\right)S_{12},$$

$$\varepsilon_{23} = 2\left(D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)}|S_{23}|\right)S_{23},$$

$$\varepsilon_{31} = 2\left(D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)}|S_{31}|\right)S_{31}. \tag{9}$$

Hệ thức (9) mô tả rõ ràng sự phụ thuộc phi tuyến tính của biến dạng vào ứng suất. Theo đó, hệ thức này chứa 6 tham số số A_{ijkl} của thành phần tuyến tính và 10 tham số B_{ijkl} của các thành phần phi tuyến tính bậc hai. Mặt khác, các thành phần phi tuyến tính bậc hai của hệ thức cũng thể hiện khả năng chịu kéo và nén của vật liệu là khác nhau. Biểu thức tuyến tính cho các tham số này được tìm thấy tương ứng thông qua các tham số $c_0^{\alpha\beta}$, $c_1^{\alpha\beta}$.

Phần bậc hai của hệ thức chứa 10 tham số B_{ijkl}, trong đó chỉ có 6 tham số độc lập tuyến tính, ta chọn các tham số B_{1111}, B_{1122}, B_{2211}, B_{2222}, B_{3311}, B_{3333}; 4 tham số còn lại là B_{1123}, B_{1133}, B_{2233}, B_{3322} được biểu diễn tuyến tính thông qua chúng.

TẠP CHÍ ISSN: 1859-316X
KHOA HỌC CÔNG NGHỆ HÀNG HẢI
JOURNAL OF MARINE SCIENCE AND TECHNOLOGY

3. Sơ đồ thực nghiệm xác định các tham số của mô hình

Để xác định các hệ số của mô hình (5), cần tìm các giá trị của $c_0^{\alpha\beta}$, $c_1^{\alpha\beta}$, $D_0^{(\gamma)}$, $D_1^{(\gamma)}$. Dựa trên dữ liệu thu được trong các thí nghiệm cơ học, sẽ thuận tiện hơn nếu xác định các tham số A_{ijkl}, B_{ijkl} có trong quan hệ (9). Nếu các tham số A_{ijkl}, B_{ijkl} được xác định từ thí nghiệm thì có thể tính được tất cả các hằng số đàn hồi của vật liệu $c_0^{\alpha\beta}$, $c_1^{\alpha\beta}$.

Để xác định tất cả các tham số của mô hình phi tuyến, cần thực hiện các thí nghiệm sau trên các trục chính dị hướng $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ của vật liệu trực hướng:

1) kéo và nén dọc theo phương của từng trục $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$;

2) cắt trong các mặt phẳng được tạo bởi các trục $\mathbf{a}_1$ và $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2$ và $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3$ và $\mathbf{a}_1$.

Bài báo [8] trình bày các thí nghiệm về kéo, nén đơn trục và cắt của các tấm trong đó các trục chính dị hướng chính trùng với các trục tọa độ. Theo đó các thí nghiệm sẽ được thực hiện trên mẫu vật liệu dạng tấm, vật liệu ở trạng thái ứng suất phẳng, sẽ có 3 trong 6 thành phần ứng suất bằng không $S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0$, (9) được viết dưới dạng sau:

$$\varepsilon_{11} = A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} +$$

$$+B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} +$$

$$+B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22},$$

$$\varepsilon_{12} = 2\left(D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)}\left|S_{12}\right|\right)S_{12}. \qquad (10)$$

4. Tham số vật liệu của thuỷ tinh hữ cơ

Các dữ liệu thực nghiệm được được trình bày trong [8] ở trạng thái ứng suất phẳng cho phép chúng ta có thể xác định được tương đối đầy đủ các tham số trong mô hình bậc hai bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất. Cùng với sự hỗ trợ của gói phần mềm toán học MatLab, các tham số của vật liệu thuỷ tinh hữu cơ được tính toán và trình bày trong Bảng 1.

Bảng 1. Giá trị các tham số vật liệu của thuỷ tinh hữ cơ

Tham số	Giá trị	Đơn vị
A_{1111}	$6{,}48\cdot10^{-11}$	Pa^{-1}
A_{1122}	$-6{,}93\cdot10^{-12}$	Pa^{-1}
A_{2222}	$6{,}48\cdot10^{-11}$	Pa^{-1}
B_{1111}	$6{,}58\cdot10^{-14}$	Pa^{-2}
B_{1122}	$2{,}32\cdot10^{-14}$	Pa^{-2}
B_{2211}	$2{,}32\cdot10^{-14}$	Pa^{-2}
B_{2222}	$6{,}58\cdot10^{-14}$	Pa^{-2}
$D_0^{(1)}$	$5{,}36\cdot10^{-11}$	Pa^{-1}
$D_1^{(1)}$	$1{,}36\cdot10^{-12}$	Pa^{-2}

Trong vật liệu composite mà dữ liệu thực nghiệm được đưa ra, các sợi gia cố được đặt trên các mặt phẳng song song theo hai hướng vuông góc. Sơ đồ gia cố này giải thích sự bằng nhau giữa các giá trị của các tham số mô hình.

5. Kết luận

Việc nghiên cứu và xây dựng các các mô hình toán học mới mô tả chính xác sự phụ thuộc giữa biến dạng và ứng suất có nhiều ý nghĩa thực tiễn và nó đặc biệt hữu ích đối với việc tính toán các giá trị tới hạn của tải trọng tác động lên vật thể hoặc kết cấu. Xuất phát từ ý nghĩa này, nghiên cứu này đã thành công xây dựng mô hình phi tuyến của vật liệu đàn hồi trực hướng dưới dạng mối quan hệ bậc hai giữa các thành phần biến dạng và ứng suất. Với mô hình đã xây dựng ở trên, việc giải quyết các bài toán về tính ổn định của kết cấu trở nên dễ dàng hơn so với các mô hình tuyến tính từng phần đã được biết đến.

Một sơ đồ thực nghiệm cơ học được xây dựng, kết quả của nó có thể được sử dụng để xác định tất cả các tham số của mô hình. Sử dụng dữ liệu thực nghiệm đã biết từ tài liệu, các tham số của của vật liệu thuỷ tinh hữu cơ đã được xác định. Các tham số này có ý nghĩa tham khảo cao đối với các nghiên cứu trong các lĩnh vực cơ học, vật liệu và sức bền vật liệu.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số: **DT24-25.137**.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] А.В. Абрамов, М.Е. Березовская, О.В. Войкина, А.С. Черенева (2014), *Обработка экспериментальных данных по определению механических свойств конструкционных материалов*, Научный электронный журнал «Новости материаловедения. Наука и техника», № 1, - 13 с.

[2] Г.В Бригадиров (1971), *Вариант построения основных соотношений разномодульной теории упругости*, Известия АН СССР. Механика твёрдого тела, № 5, С. pp.109-111.

[3] Е.В Ломакин, Ю.Н. Работнов (1978), *Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела*, Известия АН СССР. Механика твёрдого тела, № 6, С. pp.29-34.

[4] Л.А Толоконников (1969), *Вариант разномодульной теории упругости*, Механика полимеров, С. pp.363-365.

[5] Н.М Матченко, А.А. Трещёв (2024), *Теория деформирования разносопротивляющихся материалов*, Прикладные задачи теории упругости. - М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 211 с.

[6] B. Fedulov, A. Fedorenko, A. Safonov and E. Lomakin (2017), *Nonlinear shear behavior and failure of composite materials under plane stress conditions*, Acta Mechanica, P. 2033-20401.

[7] H.T. Hahn, S.W. Tsai (1973), *Nonlinear elastic behavior of unidirectional composite laminae*, Journal of Composite Materials, No. 7, pp.102-118.

[8] E.W. Smith, K.J. Pascoe(1977). *The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite*, Composites, pp.237-243.

[9] A.A. Markin, M.Y.Sokolova (2015), *Thermomechanics of Elastoplastic Deformation* , Cambridge: Cambridge International Science Publishing.

[10] M.Y. Sokolova, D.V. Khristich, V.V. Rudakov (2018), Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Series: Mechanics of Limit State 37(3), pp.100-106.

Ngày nhận bài:	30/10/2024
Ngày nhận bản sửa:	04/11/2024
Ngày duyệt đăng:	12/11/2024