

NGHIÊN CỨU RỄ NHÁNH CỦA DAO ĐỘNG TUẦN HOÀN ĐỐI VỚI BỘ TRUYỀN BÁNH RĂNG TRỤ RĂNG NGHIÊNG

STUDY ON BIFURCATION OF PERIODIC OSCILLATION FOR A HELICAL GEAR-PAIR TRANSMISSION

HOÀNG MẠNH CƯỜNG^{1*}, NGUYỄN HOÀNG VIỆT²

¹Viện Cơ khí, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

²Bộ môn Cơ sở - Khoa Quản trị kinh doanh và Du lịch, Trường Đại học Hà Nội

*Email liên hệ: cuonghm@vimar.edu.vn

Tóm tắt

Bài báo này đề cập đến sự phân tích rẽ nhánh của dao động tuần hoàn trong các chế độ chuyển động bình ổn của cặp bánh răng trụ răng nghiêng. Ban đầu, một mô hình dao động phi tuyến của hệ truyền động bánh răng đã được đưa ra, trong đó, độ cứng ăn khớp được xem như một hàm thay đổi theo thời gian và khe hở giữa các răng khi ăn khớp cũng được kể đến. Dựa trên phương trình Lagrange II, phương trình vi phân chuyển động của hệ đã được thiết lập. Việc phân tích sự ổn định và khảo sát rẽ nhánh của nghiệm tuần hoàn được thực hiện bằng phương pháp tính toán số, dựa trên lý thuyết rẽ nhánh của Floquet. Kết quả thu được là các điểm rẽ nhánh và dao động của hệ trước và sau các điểm rẽ nhánh.

Từ khóa: Dao động phi tuyến, nghiệm tuần hoàn, động lực học phi tuyến, rẽ nhánh.

Abstract

This paper analyzes bifurcation of steady-state periodic oscillation for a helical gear-pair system. A nonlinear vibration model considering gear backlash was proposed in which mesh stiffness is considered as a time-varying function. The differential equation of motions is constituted by applying the Lagrange's equation of the second kind. The stability analysis and bifurcation of the periodic solution are conducted by using numerical method together with Floquet's branching theory. The obtained results are vibrational graph and bifurcation points.

Keywords: Nonlinear vibration, periodic solution, nonlinear dynamics, Bifurcation.

1. Mở đầu

Với các bộ truyền động bánh răng, phương trình động lực học mô tả dao động của hệ thường là các phương trình vi phân phi tuyến. Trong các chế độ chuyển động bình ổn, hiện tượng dao động thường

thấy là các dao động tuần hoàn. Tuy nhiên, khi có khe hở giữa các răng khi ăn khớp, sẽ cho ta một hệ dao động phi tuyến mạnh, các hệ thống như vậy, sẽ có các đáp ứng động lực học rất phức tạp, như sự rẽ nhánh, dao động hỗn độn [8].

Nghiên cứu các đáp ứng động lực học đối với các mô hình dao động phi tuyến của bộ truyền động bánh răng, cho ta sự hiểu biết nhiều hơn về sự thay đổi các đặc tính dao động trong quá trình truyền động. Bởi vì, nguồn gốc chính của dao động trong hệ truyền động bánh răng, thường là hoạt động ăn khớp của các bánh răng.

Một số mô hình dao động phi tuyến của cặp bánh răng trong quá trình ăn khớp đã được phát triển trong những năm gần đây, trong đó, có đưa vào xem xét các yếu tố động lực học quan trọng, như, khe hở giữa các răng, độ cứng ăn khớp thay đổi theo thời gian và kích động từ những sai số truyền động của bánh răng [1-7].

Trong nghiên cứu này, đề cập đến việc phân tích rẽ nhánh của dao động tuần hoàn trong các chế độ chuyển động bình ổn khác nhau của cặp bánh răng trụ với răng nghiêng trong đó có kể đến khe hở giữa các răng khi ăn khớp.

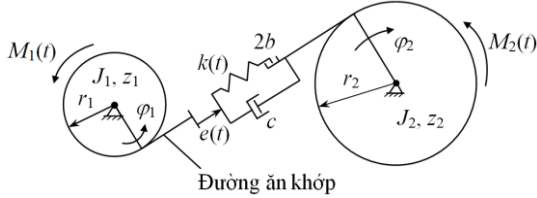
2. Mô hình động lực học của bộ truyền bánh răng

Xét mô hình dao động của bộ truyền bánh răng được cho như Hình 1 [6, 10, 11], trong đó m_1, m_2 là khối lượng của hai bánh răng, J_1, J_2 là mômen quán tính của hai bánh răng đối với trục quay của nó, r_1, r_2 là bán kính vòng lăn của các bánh răng, z_1, z_2 là số răng của các bánh răng, c là độ cản ăn khớp và $k(t)$ là độ cứng ăn khớp. Khe hở giữa các cặp răng ăn khớp được cho là $2b$ và $e(t)$ là hàm kích động trong quá trình ăn khớp, $M_1(t), M_2(t)$ là mômen phát động và mômen cản. Gọi ω_1, ω_2 là vận tốc góc của các bánh răng. Do số cặp răng tham gia ăn khớp thay đổi theo từng thời điểm, dẫn đến độ cứng ăn khớp $k(t)$ thay đổi theo thời gian. Trong chế độ chuyển động bình ổn của cặp bánh răng ăn khớp, nếu vận tốc góc của các bánh răng ω_1, ω_2 không đổi, thì độ cứng ăn khớp $k(t)$ sẽ tuần hoàn theo t với chu kỳ $T_z = 2\pi/\omega_z$, do đó có thể được biểu diễn

dưới dạng một chuỗi Fourier có dạng như sau [12]:

$$k(t) = k_0 + \sum_{n=1}^N k_n \cos(n\omega_z t + \gamma_n) \quad (1)$$

Trong đó $\omega_z = z_1\omega_1$ là tần số góc ăn khớp của cặp bánh răng, N là số phần tử của chuỗi.



Hình 1. Mô hình dao động của bộ truyền bánh răng

Hàm kích động $e(t)$ xuất hiện do sai lệch của mỗi bước răng. Sự sai lệch này phụ thuộc vào lỗi của từng cặp bánh răng ăn khớp. Lỗi này xuất hiện do nhiều nguyên nhân, do gia công cơ khí khi chế tạo, do mài mòn, do tróc rỗ bề mặt răng,... Theo tài liệu [12], hàm kích động $e(t)$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ $T=2\pi/\omega_1$, nên có thể biểu diễn theo một chuỗi Fourier như sau:

$$e(t) = \sum_{i=1}^I e_i \cos(i\omega_1 t + \alpha_i) \quad (2)$$

Trong đó các hệ số e_i đặc trưng cho mức độ hư hỏng của cặp bánh răng ăn khớp.

Ta thấy, hệ có 2 bậc tự do, ta chọn các tọa độ suy rộng đủ là các góc quay φ_1, φ_2 của hai bánh răng. Bằng cách áp dụng phương trình Lagrange loại II, ta thiết lập được phương trình vi phân chuyển động của hệ có dạng:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + r_1 c [r_1 \dot{\varphi}_1 - r_2 \dot{\varphi}_2 + \dot{e}(t)] + r_1 k(t) h = M_1(t) \quad (3)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + r_2 c [r_1 \dot{\varphi}_1 - r_2 \dot{\varphi}_2 + \dot{e}(t)] + r_2 k(t) h = -M_2(t) \quad (4)$$

Trong đó:

$$h = \begin{cases} r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2 + e(t) - b; & r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2 + e(t) > b \\ 0; & -b \leq r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2 + e(t) \leq b \\ r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2 + e(t) + b; & r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2 + e(t) < -b \end{cases} \quad (5)$$

Ta nhân hai vế của (3) với r_1/J_1 , của (4) với $-r_2/J_2$, rồi cộng hai phương trình với nhau, ta được:

$$r_1 \ddot{\varphi}_1 - r_2 \ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{r_1^2}{J_1} + \frac{r_2^2}{J_2} \right) c [r_1 \dot{\varphi}_1 - r_2 \dot{\varphi}_2 + \dot{e}(t)] + \left(\frac{r_1^2}{J_1} + \frac{r_2^2}{J_2} \right) k(t) h = \frac{r_1}{J_1} M_1(t) + \frac{r_2}{J_2} M_2(t) \quad (6)$$

Đưa vào tọa độ suy rộng tương đối:

$$q = r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2 \quad (7)$$

Thay (7) vào (6), ta có:

$$m \ddot{q} + c \dot{q} + k(t) H(t, q) = F(t) - c \dot{e}(t) \quad (8)$$

Trong đó:

$$H(t, q) = \begin{cases} (q + e(t)) - b; & (q + e(t)) > b \\ 0; & -b \leq (q + e(t)) \leq b \\ (q + e(t)) + b; & (q + e(t)) < -b \end{cases} \quad (9)$$

$$m = \frac{J_1 J_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2} \quad (10)$$

$$F(t) = m \left(\frac{r_1}{J_1} M_1(t) + \frac{r_2}{J_2} M_2(t) \right) \quad (11)$$

Để xác định lực kích động $F(t)$ trong phương trình (8), người ta đưa ra giả thiết như sau [12]:

Khi bộ truyền hoạt động trong trạng thái bình ổn:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = const, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2 = const \quad (12)$$

Trong trạng thái này, do $k_0 \gg k_n$ ($n = 1, \dots, N$) và cần yếu nên ta có:

$$k(t) \approx k_0, \quad c \approx 0 \quad (13)$$

Khi đó, sai số truyền động $q(t)$ có dạng:

$$q(t) \approx q_0 = const \quad (14)$$

Trong đó q_0 được coi là sai số truyền dẫn tĩnh. Đó chính là lượng biến dạng tổng cộng theo phương đường ăn khớp của các cặp bánh răng ăn khớp dưới tải trọng không đổi. Trong trường hợp này, ta coi các cặp răng ăn khớp luôn tiếp xúc nhau, dẫn đến:

$$H(t, q) \approx q_0 + e(t) \quad (15)$$

Thay (12), (13), (14) vào (8), ta được:

$$F(t) \approx F_0(t) = k_0 (q_0 + e(t)) \quad (16)$$

Thay lại (16) vào (8), ta được:

$$m \ddot{q} + c \dot{q} + k(t) H(t, q) = k_0 q_0 + k_0 e(t) - c \dot{e}(t) \quad (17)$$

(17) là phương trình vi phân mô tả dao động của bộ truyền bánh răng trong quá trình ăn khớp.

3. Kết quả tính toán số

Để phân tích sự ổn định và khảo sát rẽ nhánh của các nghiệm tuần hoàn, một chương trình tính toán số đã được xây dựng dựa trên phương pháp bắn đơn [8, 9] và lý thuyết rẽ nhánh của Floquet [8]. Để tính toán số, ta chọn tần số góc ω_1 của bánh 1 làm tham số rẽ nhánh, các tham số còn lại được lấy theo [12] như trong các Bảng 1-3.

Bảng 1. Giá trị các tham số của bộ truyền bánh răng

Tham số	Giá trị	Đơn vị
J_1	9.3×10^{-2}	kgm ²
J_2	0.272	kgm ²
r_1	30.46×10^{-3}	m
r_2	84.86×10^{-3}	m
q_0	1.2×10^{-5}	m
b	0.025×10^{-3}	m

Bảng 2. Các hệ số trong chuỗi Fourier của $k(t)$

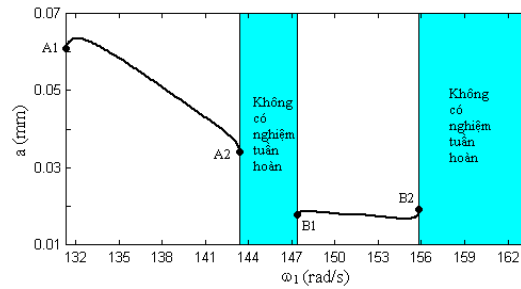
n	k_n (N/m)	γ_n (rad)
0	8.1846×10^8	
1	3.2267×10^7	2.5581
2	1.3516×10^7	-1.4421
3	8.1510×10^6	-2.2588
4	3.5280×10^6	0.9367
5	4.0280×10^6	-0.8696
6	9.7100×10^5	-2.0950
7	1.4245×10^6	0.9309
8	1.5505×10^6	0.2584
9	4.6450×10^5	-1.2510
10	1.4158×10^6	2.1636

Bảng 3. Các hệ số trong chuỗi Fourier của $e(t)$

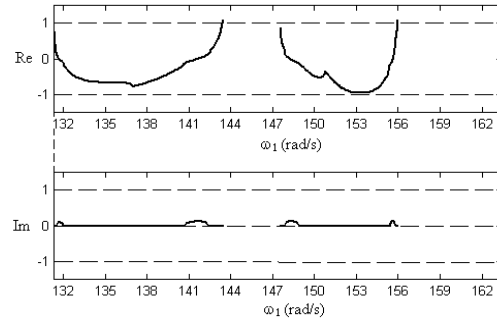
i	e_i (mm)	α_i (rad)
1	0.01	1.047
2	0.003	-1.4521
3	0.0018	0.5233
4	0.0011	1.4570
5	0.0009	0.8622
6	0.0003	1.1966

Với các số liệu như trên, ta cho ω_1 biến thiên trong khoảng từ 131,3 (rad/s) đến 163,4 (rad/s) sau khi tính toán bằng phương pháp số, ta được một số kết quả được cho trong các Hình 2 - 7.

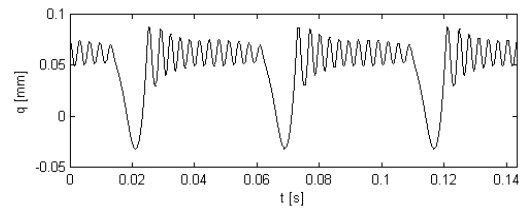
Từ các kết quả tính toán cho ta thấy, tại $\omega_1=131,3$ (rad/s), ứng với điểm A_1 trên Hình 2, ta tìm được một nghiệm tuần hoàn ổn định chu kỳ $2\pi/\omega_1$. Xuất phát từ



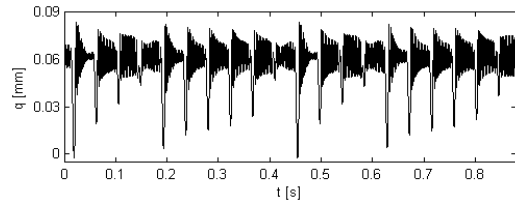
Hình 2. Biểu đồ rẽ nhánh



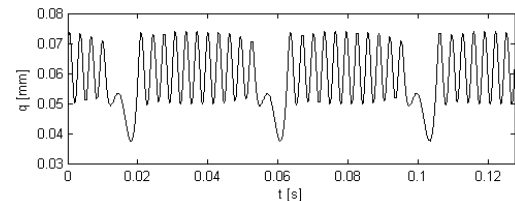
Hình 3. Đồ thị nhân tử Floquet



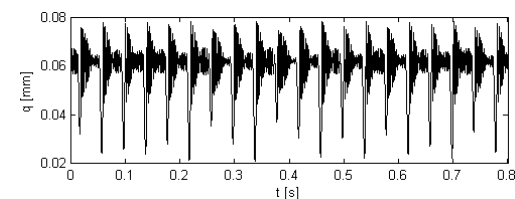
Hình 4. Dao động tuần hoàn tại $\omega_1 = 131,3$ (rad/s)



Hình 5. Dao động không tuần hoàn tại $\omega_1 = 144,4$ (rad/s)



Hình 6. Dao động tuần hoàn tại $\omega_1 = 147,5$ (rad/s)



Hình 7. Dao động không tuần hoàn tại $\omega_1 = 157$ (rad/s)

giá trị này, ta cho ω_1 tăng dần lên, tại mỗi giá trị của ω_1 , ta tìm được một nghiệm tuần hoàn ổn định, khi tăng đến giá trị $\omega_1=143,38$ (rad/s) ứng với điểm A_2 trên Hình 2, tại đây có nhân tử Floquet nằm trên vòng tròn đơn vị và nếu ta tiếp tục tăng ω_1 , nhân tử này sẽ rời vòng tròn đơn vị theo hướng +1 (xem Hình 3), vậy tại A_2 ta có một điểm rẽ nhánh. Mặt khác, từ Hình 2, ta thấy tại điểm A_2 có một tiếp tuyến thẳng đứng với đường cong biên độ của nghiệm tuần hoàn, theo lý thuyết rẽ nhánh điểm A_2 là điểm rẽ nhánh nếp gấp - chu trình. Khi đi qua điểm này các nghiệm tuần hoàn không còn ổn định nữa chúng nhảy đến tập hút mới có thể hỗn loạn hoặc hầu tuần hoàn. Trên các Hình 4 và Hình 5 là dao động của hệ trước và sau điểm rẽ nhánh A_2 . Tiếp tục cho ω_1 tăng lên, dao động của hệ vẫn mất ổn định, sự mất ổn định này tồn tại cho đến giá trị $\omega_1=147,5$ (rad/s) (điểm B_1 trên Hình 2), tại đây lại xuất hiện một nghiệm tuần hoàn mới ổn định chu kỳ $2\pi/\omega_1$, nghiệm tuần hoàn mới ổn định cho đến $\omega_1=155,86$ (rad/s), khi đi qua giá trị này thì có nhân tử Floquet đi ra khỏi vòng tròn đơn vị theo hướng +1 (xem Hình 3), do đó tại đây lại xuất hiện một điểm rẽ nhánh (điểm B_2 trên Hình 2). Mặt khác từ Hình 2, ta thấy tại điểm B_2 có một tiếp tuyến thẳng đứng với đường cong biên độ các nghiệm tuần hoàn, do đó theo lý thuyết rẽ nhánh điểm B_2 là điểm rẽ nhánh nếp gấp - chu trình. Trên các Hình 6 và 7 là dao động của hệ trước và sau điểm rẽ nhánh B_2 .

4. Kết luận

Bài báo này đã phân tích rẽ nhánh của dao động tuần hoàn đối với bộ truyền bánh răng trụ răng nghiêng, trong đó có xét đến khe hở giữa các răng trong quá trình ăn khớp, bằng phương pháp tính toán số. Từ các kết quả có được ta thấy, khi cho vận tốc góc của bánh dẫn biến thiên trong khoảng từ 131,3 (rad/s) đến 163,4 (rad/s), trong hệ khảo sát đã xuất hiện điểm rẽ nhánh nếp gấp chu trình. Khi đi qua các điểm rẽ nhánh này, dao động tuần hoàn của hệ mất tính ổn định và hệ sẽ rơi vào miền dao động hầu tuần hoàn hoặc dao động hỗn độn. Các kết quả tính toán có được trong nghiên cứu này, có thể sử dụng làm cơ sở cho việc giám sát vận hành các máy và thiết bị có sử dụng bộ truyền động bánh răng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Wang J., Li R. and Peng X. (2003), *Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems*, ASME Applied Mechanics Reviews, Vol.56(3), pp.309-329.
 [2] Smith J. D. (2003), *Gear Noise and Vibration (second edition)*, Marcel Dekker Inc, New York, Basel.

[3] Parker G. R. (2000), *Non-linear dynamic response of spur gear pair: Modelling and experimental comparisons*, Journal of Sound and Vibration, Vol.237(3), pp.435-455.
 [4] Shen Y. J., Yang S. P. and Liu X. D. (2006), *Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method*, International Journal of Mechanical Science, Vol.48, pp.1256-1263.
 [5] Kahraman A., Singh R. (1991), *Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system*, Journal of Sound and Vibration, Vol.146, pp.153-156.
 [6] Theodossiades S. and Natsiavas S. (2000), *Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash*, Journal of Sound and Vibration, Vol.229(2), pp.287-310.
 [7] Bonori, G. and Pellicano, F (2007), *Non-smooth dynamics of spur gears with manufacturing errors*, Journal of Sound and Vibration, Vol.306, pp.271-283.
 [8] Nayfeh, A. H. and Balachandran, B. (1995), *Applied nonlinear dynamics*, John Wiley & Sons, New York.
 [9] Nguyen Van Khang, Hoang Manh Cuong, Nguyen Thai Minh Tuan (2012), *Calculation of nonlinear vibrations of piecewise-linear systems using the shooting method*, Vietnam Journal of Mechanics, VAST, Vol.34, No.3 (2012), pp.157-167.
 [10] Walha L., Fakhfakh T., Haddar M. (2006), *Backlash effect on dynamic analysis of a two-stage spur gear system*, Journal of Failure Analysis and Prevention, Vol.6(3), pp.60-68.
 [11] Walha L., Fakhfakh T., Haddar M. (2009), *Nonlinear dynamics of a two-stage gear system with mesh stiffness fluctuation, bearing flexibility and backlash*, Mechanism and Machine Theory, Vol.44, pp.1058-1069.
 [12] Nguyen Van Khang, Nguyen Phong Dien, Hoang Manh Cuong (2009), *Linearization and parametric vibration analysis of some applied problems in multibody systems*, Multibody System Dynamics, Vol.22, pp.163-180.

Ngày nhận bài:	14/01/2024
Ngày nhận bản sửa:	24/01/2024
Ngày duyệt đăng:	29/01/2024