VỀ MÔ HÌNH CÂN BẰNG NASH-COURNOT CHO THỊ TRƯỜNG SẢN XUẤT ĐIỆN PHÂN BIỆT

THE DIFFERENTIATED NASH-COURNOT EQUILIBRIUM MODEL FOR ELECTRICITY PRODUCTION MARKET

VŨ TUẤN ANH

Khoa Cơ sở Cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

Email liên hệ: anhvt246@vimaru.edu.vn

Tóm tắt

Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu mô hình cân bằng Nash-Cournot cho thị trường sản xuất điện phân biệt (mở rộng của mô hình cân bằng Nash-Cournot cổ điển). Cụ thể, tác giả trình bày mô hình, nêu bài toán cân bằng của mô hình và đưa ra ý nghĩa thực tế của bài toán. Đồng thời, tác giả giới thiệu cách đưa bài toán cân bằng của mô hình về bài toán quy hoạch lồi toàn phương và thuật toán giải tương ứng cùng với ví dụ số minh họa.

***Từ khóa**: Mô hình cân bằng Nash-Cournot, thị trường sản xuất điện phân biệt, bài toán cân bằng, điểm cân bằng của mô hình, bài toán quy hoạch lồi toàn phương.*

Abstract

This paper studies the differentiated Nash-Cournor equilibrium model for electricity production market (the expansion of the classic Nash-Cournot equilibrium model). Specifically, the author presents the model, the equilibrium problem of the model and its meaning. In addition, the author proposes the way to convert the equilibrium problem of the model to a problem of convex quadratic program. An algorithm for solving the latter problem and a numerical example are also discussed.

***Keywords**: Nash-Cournor equilibrium model, diferrentiated eletricity production market, equilbrium form of the model, convex quadratic program.*

1. Đặt vấn đề

Mô hình cân bằng Nash-Cournot cổ điển đã khá quen thuộc trong toán ứng dụng (chẳng hạn, xem [1], [4], [5]). Ta xét mô hình trong thị trường sản xuất điện. Ở đó, giả sử có n nhà máy cùng sản xuất kinh doanh điện khác nhau, chẳng điện hạt nhân, điện năng lượng mặt trời, điện gió, thuỷ điện, nhiệt điện,…

Ta giả thiết rằng giá thành sản xuất một đơn vị điện do nhà máy thứ i cung cấp là một hàm affine được cho bởi:

$$p_i(x_1,...,x_n) := \alpha - \sum_{k=1}^{n} \tau_{ik} x_k \quad (1)$$

với mọi $i = 1,...,n$; trong đó $\alpha > 0$ là giá ban đầu, $\tau_{ik} > 0$ là hệ số giảm giá do sản lượng tăng. Hàm giá thành này xuất hiện trong các loại điện khác nhau, trong đó người sử dụng có thể thích loại điện được sản xuất bởi một nhà máy này hơn các nhà máy còn lại, ví dụ nhiều người sử dụng thích loại điện gió và năng lượng mặt trời hơn nhiệt điện hoặc năng lượng hạt nhân. Chú ý rằng khi $\tau_{ik} = \tau$ với mọi i và k thì hàm giá thành trở thành hàm thông thường (trong mô hình cân bằng Nash-Cournot cổ điển). Lợi nhuận đạt được bởi công ty i có dạng:

$$f_i(x) := p_i(x_1,...,x_n)x_i - c_i(x_i), \quad (2)$$

trong đó $c_i(x_i)$ là chi phí (bao gồm cả phí cho việc gây ô nhiễm môi trường khi sản xuất) để sản xuất x_i sản lượng. Nói chung, $c_i(x_i)$ là một hàm lồi tăng dần chỉ phụ thuộc vào mức sản xuất. Tính lồi có nghĩa là giá thành sản xuất một đơn vị càng tăng khi lượng sản xuất càng lớn (chẳng hạn khi sản xuất nhiều thì bị đánh thuế càng cao do gây ô nhiễm môi trường nên trong thực tế khi người tiêu dùng càng dùng nhiều điện thì càng phải mua với giá cao).

Gọi $K_i \in$ **R**, ($i = 1,\ldots,n$) là tập chiến lược sản phẩm của nhà máy thứ i. Như vậy, nhà máy thứ i chỉ được lựa chọn phương án sản xuất thuộc tập K_i. Mỗi nhà máy đều có chung một mong muốn là cực đại hàm lợi nhuận của mình bằng cách chọn sản lượng để sản xuất. Khi đó, tập chiến lược của mô hình cân bằng thị trường kinh tế là tích Cartesian các tập chiến lược của mỗi nhà máy: $K = K_1 \times \ldots \times K_n$.

Một cách tiếp cận thường được sử dụng cho mô hình này được dựa trên khái niệm cân bằng Nash nổi tiếng. Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1: *Một điểm* $x^* = (x_1^*,...,x_n^*) \in K$ *được gọi là điểm cân bằng Nash của mô hình cân bằng Nash-Cournot nếu với mọi* $i = 1,\dots,n$ *và với mọi* $y_i \in K_i$ *ta đều có:*

$$f_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*,...,x_n^*) \le f_i(x_1^*,...,x_n^*). \tag{3}$$

Đặt $f_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*,...,x_n^*) = f_i(x^*[y_i])$ thì (3) được viết lại dưới dạng:

$$f_i(x^*) = \max_{y_i \in K_i} f_i(x^*[y_i]). \tag{4}$$

Về ý nghĩa kinh tế, tại điểm cân bằng Nash thì lợi nhuận của các nhà máy là cao nhất, bất kỳ nhà máy nào chọn phương án sản xuất ra khỏi điểm cân bằng trong khi các nhà máy còn lại vẫn giữ phương án sản xuất tại điểm cân bằng thì lợi nhuận của nhà máy thay đổi chỉ có thể thiệt đi chứ không thể tăng lên. Do đó, tất cả các nhà máy đều muốn mình sản lượng của mình ở vị trí cân bằng.

Với mỗi $x = (x_1,\dots,x_n) \in K$ và $y = (y_1,\dots,y_n) \in K$ ta sử dụng hàm Nikaido-Isoda:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x_1,...,x_n) - f_i(x_1,...,x_{i-1}, y_i, x_{i+1},...,x_n)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x) - f_i(x[y_i])\right). \tag{5}$$

Khi đó, bài toán tìm điểm cân bằng của mô hình cân bằng Nash-Cournot tương đương với bài toán cân bằng $EP(f,K)$ sau:

$$\text{Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } f(x^*, y) \ge 0 \ \forall y \in K. \tag{6}$$

Định lý 1: *Cho tập chiến lược K là một tập con, lồi, đóng, khác rỗng trong* $\boldsymbol{R^n}$ *và hàm* $f(x,y)$ *xác định bởi (5). Khi đó, điểm* $x^* \in K$ *là điểm cân bằng Nash khi và chỉ khi nó là một nghiệm của bài toán cân bằng* $EP(f,K)$.

Chứng minh: Giả sử x^* là phương án tối ưu của mô hình cân bằng Nash-Cournot thì theo (4) ta có $f_i(x^*) = \max_{y_i \in K_i} f_i(x^*[y_i]) \ \forall i = 1,\dots,n.$ Suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x_1^*,...,x_n^*) - f_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*,...,x_n^*)\right] \ge 0 \ \forall y \in K.$$

Kết hợp điều này với (5), ta có $f(x^*, y) \ge 0 \ \forall y \in K.$

Vậy x^* là nghiệm của bài toán cân bằng $EP(f,K)$.

Ngược lại, nếu $x^* \in K$ là nghiệm của bài toán $EP(f,K)$, ta có $f(x^*, y) \ge 0 \ \forall y \in K.$

Theo (5) ta có $\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x_1^*,...,x_n^*) - f_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*,...,x_n^*)\right] \ge 0 \ \forall y \in K.$

Chọn $y = (y_1, x_2^*,...,x_n^*)$ suy ra: $f_1(y_1, x_2^*,...,x_n^*) \le f_1(x_1^*,...,x_n^*).$

Mặt khác, với $y = (x_1^*,...,x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*,...,x_n^*)$ ta có:

$$f_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*,...,x_n^*) \le f_i(x_1^*,...,x_n^*) \ \forall i = 2,3,...,n-1.$$

Thay $y = (x_1^*,....,x_{n-1}^*, y_n)$, ta được $f_n(x_1^*,...,x_{n-1}^*, y_n) \le f_1(x_1^*,...,x_n^*).$

Vậy x^* là một điểm cân bằng Nash.

Trong thực tế, mức độ sản xuất ở mỗi nhà máy thường thoả mãn một tỷ lệ nhất định:

$$l_j \le \frac{x_j}{\sum_{h \ne j}^{n} x_h} \le u_j;\ 0 \le l_j \le u_j;\ j = 1,\dots,n.$$

Tức là sản lượng điện của một loại điện so với tổng sản lượng còn lại của thị trường điện phải thỏa mãn một giới hạn cho phép, ví dụ điện hạt nhân hay nhiệt điện ở nhiều nước bị hạn chế sản xuất do gây ô nhiễm môi trường, chặt phá rừng.

Đặt:

$D:=\{(x_1,...,x_n):\omega_j(x_1,...,x_n)=\dfrac{x_j}{\sum\limits_{h\neq j}^{n}x_h}-u_j\le 0,\psi_j(x_1,...,x_n)=l_j-\dfrac{x_j}{\sum\limits_{h\neq j}^{n}x_h}\le 0,\forall\, j=1,...,n\}$ thì D là một tập lồi đa diện.

Như vậy, bài toán cân bằng $EP(f,K)$ với ràng buộc D được phát biểu lại thành bài toán cân bằng $EP(f,K,D)$:

$$\text{Tìm } x^*\in K\cap D \text{ sao cho } f(x^*,y)\ge 0\ \forall\, y\in K. \qquad (7)$$

2. Chuyển bài toán cân bằng *EP(f,K,D)* về bài toán quy hoạch lồi toàn phương

Thay (1) vào (2) ta có $f_i(x)=p_i(x_1,...,x_n)x_i-c_i(x_i)=(\alpha-\sum\limits_{k=1}^{n}\tau_{ik}x_k)x_i-c_i(x_i)$

với $\alpha>0,\tau_{ik}>0.$

Khi đó, theo (5): $f(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\big(f_i(x)-f_i(x[y_i])\big)$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{x_i\alpha-x_i\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}x_k-c_i(x_i)-y_i\alpha+y_i\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}x_k-x_i\tau_{ii}y_i+\tau_{ii}y_i^2+c_i(y_i)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{(x_i-y_i)\alpha+(y_i-x_i)\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}x_k+\tau_{ii}y_i(y_i-x_i)+c_i(y_i)-c_i(x_i)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{(y_i-x_i)(\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}x_k+\tau_{ii}y_i-\alpha)+c_i(y_i)-c_i(x_i)\right\}$$

$$=\left\langle Px+Qy-\overline{\alpha},y-x\right\rangle+c_i(y_i)-c_i(x_i)=\left\langle (P+Q)x-\overline{\alpha},y-x\right\rangle+\left\langle Q(y-x),y-x)\right\rangle+h(y)-h(x)$$

với $P:=(\tau_{ij})_{n\times n},Q:=diag(\tau_{11},...,\tau_{nn}),\overline{\alpha}:=(\alpha,...,\alpha)^T,h(x):=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i(x_i).$

Vì $\left\langle Q(y-x,y-x)\right\rangle\ge 0\ \forall\, x,y\in$ $\mathbf{R}^n$ nên nghiệm của bài toán cân bằng $EP(g,K)$ cũng là nghiệm của bài toán cân bằng $EP(f,K)$ với: $g(x,y)=\left\langle (P+Q)x-\overline{\alpha},y-x\right\rangle+h(y)-h(x).$

Giả sử $h(x)$ là một hàm khả vi trên $K.$

Mệnh đề 1: *Điểm* $x^*\in K$ *là nghiệm của bài toán cân bằng* $EP(g,K)$ *khi và chỉ khi* x^* *là nghiệm của bài toán:*

$$\min\{\varphi_{x^*}(y)=\left\langle (P+Q)x^*-\overline{\alpha},y-x^*\right\rangle+h(y)-h(x^*),y\in K\}. \qquad (8)$$

Chứng minh: Giả sử x^* là nghiệm của bài toán cân bằng $EP(g,K),$ khi đó $\varphi_{x^*}(y)\ge 0\ \forall y\in K.$ Ta lại có $\varphi_{x^*}(x^*)=0.$ Vậy hàm $\varphi_{x^*}(y)$ đạt cực tiểu tại $x^*.$

Giả sử x^* là một nghiệm của (8), do đó $0\in\nabla\varphi_{x^*}(x^*)+N_K(x^*),$

trong đó $N_K(x^*):=\{w\in\mathbf{R}^n:\left\langle w,y-x^*\right\rangle\le 0\ \forall y\in K\}$ là nón pháp tuyến ngoài tại x^* của tập $K,$ hay $\left\langle\nabla\varphi_{x^*}(x^*),y-x^*\right\rangle\ge 0\ \forall y\in K.$

Theo tính chất của hàm lồi: $\left\langle\nabla\varphi_{x^*}(x^*),y-x^*\right\rangle\le\varphi_{x^*}(y)-\varphi_{x^*}(x^*)\ \forall y\in K.$

Kết hợp với $\varphi_{x^*}(x^*)=0$ ta được $\varphi_{x^*}(y)\ge 0\ \forall y\in K.$ Vậy x^* là nghiệm của bài toán cân bằng $EP(g,K).$

Định lý 2: *Điểm $x^* \in K$ là nghiệm của bài toán cân bằng $EP(g,K)$ khi và chỉ khi x^* là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP):*

Tìm $x^* \in K: \left\langle F(x) = (P+Q)x^* - \overline{\alpha} + \nabla h(x^*), y - x^* \right\rangle \geq 0 \ \forall y \in K.$ (9)

Chứng minh: Giả sử x^* là nghiệm của bài toán $EP(g,K)$, theo **Mệnh đề 1** ta có x^* cũng là nghiệm của bài toán $\min\{\varphi_{x^*}(y) = \left\langle (P+Q)x^* - \overline{\alpha}, y - x^* \right\rangle + h(y) - h(x^*), y \in K\}.$

Do đó $0 \in \nabla\varphi_{x^*}(x^*) + N_K(x^*)$ hay $0 \in [(P+Q)x^* - \overline{\alpha} + \nabla h(x^*) + N_K(x^*)]$

$\Rightarrow \left\langle (P+Q)x^* - \overline{\alpha} + \nabla h(x^*), y - x^* \right\rangle \geq 0 \ \forall y \in K.$ Vậy x^* là nghiệm của (9).

Để chứng minh điều ngược lại, ta viết $\left\langle (P+Q)x^* - \overline{\alpha} + \nabla h(x^*), y - x^* \right\rangle \geq 0 \ \forall y \in K$ dưới dạng:

$$\left\langle (P+Q)x^* - \overline{\alpha}, y - x^* \right\rangle + \left\langle \nabla h(x^*), y - x^* \right\rangle \geq 0 \ \forall y \in K.$$

Sử dụng tính chất của hàm lồi ta có $\left\langle \nabla h(x^*), y - x^* \right\rangle \leq h(y) - h(x^*) \ \forall y \in K.$ Do đó, nếu x^* là nghiệm của (9) thì x^* cũng là nghiệm của bài toán $EP(g,K)$. Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Định lý 3: Giả sử $f: K \to \mathbf{R}$ *là hàm khả vi, lồi trên tập lồi* $K \in \mathbf{R}^n$. *Khi đó điểm* $x^* \in K$ *là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (9) khi và chỉ khi* x^* *là nghiệm của bài toán quy hoạch lồi* $CP(f,K)$:

$$\min\{f(x): x \in K\} \tag{10}$$

với $F(x) := \nabla f(x).$

Chứng minh: Giả sử x^* là nghiệm của bài toán (9), tức là $\left\langle \nabla f(x^*), y - x^* \right\rangle \geq 0 \ \forall y \in K.$ Do f là hàm lồi, khả vi nên $\left\langle \nabla f(x^*), y - x^* \right\rangle \leq f(y) - f(x^*) \ \forall y \in K.$ Suy ra $f(y) \geq f(x^*) \ \forall y \in K$ hay x^* là nghiệm của (10).

Giả sử x^* là nghiệm của (10). Ta có $f(y) \geq f(x^*) \ \forall y \in K.$ Để chứng minh điều ngược lại, ta dùng phản chứng: $\left\langle \nabla f(x^*), y - x^* \right\rangle < 0 \ \forall y \in K.$ Khi đó, lấy $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, do K là tập lồi nên:

$$z_\varepsilon = \varepsilon y + (1-\varepsilon)x^* = x^* + \varepsilon(y - x^*) \in K \ \forall y \in K$$

và sử dụng khai triển Taylor ta có:

$f(z_\varepsilon) = f(x^*) + \varepsilon\left\langle \nabla f(x^*), y - x^*) \right\rangle + o\big(\varepsilon(y - x^*)\big) < f(x^*) \ \forall y \in K,$ tức x^* không là nghiệm của bài toán (10). Điều này trái với giả thiết.

Giả sử $P = (\tau_{ij})_{n\times n}$ là ma trận đối xứng, nửa xác định dương. Khi đó $P+Q$ cũng là ma trận đối xứng, nửa xác định dương. Áp dụng **Định lý 3** và cho $h(x)$ là hàm tuyến tính hoặc lồi toàn phương thì bài toán cân bằng (7) được đưa về bài toán quy hoạch lồi toàn phương $CQP(f,K,D)$:

$$\min\{\frac{1}{2}x^T(P+Q)x - \overline{\alpha}^T x + h(x): x \in K \cap D\}. \tag{11}$$

3. Thuật toán giải bài toán quy hoạch lồi toàn phương dạng (11)

a) Bài toán: Cho hàm bậc hai lồi f :$\mathbf{R}^n \to$ **R** và hai tập lồi đa diện $K, D \in$ $\mathbf{R}^n$ với giả thiết $K \cap D \neq$ Ø. Xét bài toán tối ưu sau:

(Q) Tìm $\overline{x} \in K$ sao cho $f(\overline{x}) = \gamma_K := \min\{f(x): x \in K\}$

với $S := \{x \in K: f(x) = \gamma_K\}$ là tập nghiệm (S là tập lồi do hàm f lồi và K là tập lồi).

Khi đó, (11) được viết lại thành bài toán: (P) Tìm $x^* \in S \cap D,$ tức là tìm nghiệm của tối ưu của bài toán (Q) thỏa mãn thêm các ràng buộc phụ được cho bởi tập lồi đa diện $D.$

b) Thuật toán giải: Để cho tiện, ta sẽ gọi *Thuật toán A* là một thuật toán hữu hạn đã biết nào đó mà có thể giải được bài toán quy hoạch lồi toàn phương (chẳng hạn, thuật toán đơn hình Beale, thuật toán Hildreth-D'Esopo,…).

Ta sẽ giải (P) bằng thuật toán sau đây, gọi tắt là thuật toán hai pha:

Pha 1: Dùng *Thuật toán A* giải bài toán (Q) nhận được $\bar{x} \in K$ và $f(\bar{x}) = \gamma_K$. Hai khả năng xảy ra:

+ Khả năng 1: $\bar{x} \in D$ thì $x^* = \bar{x}$ là lời giải cần tìm của bài toán (P). Dừng quá trình giải.

+ Khả năng 2: $\bar{x} \notin D$ thì chuyển sang Pha II.

Pha 2: Dùng *Thuật toán A* giải bài toán quy hoạch $\min\{f(x) : x \in K \cap D\}$, nhận được lời giải $\hat{x} \in K \cap D$. Rõ ràng $f(\hat{x}) \geq \gamma_K$ (do $K \supseteq K \cap D$). Hai khả năng xảy ra:

+ Khả năng 1: $f(\hat{x}) = \gamma_K$ thì $x^* = \hat{x}$ là lời giải cần tìm của bài toán (P). Dừng quá trình giải.

+ Khả năng 2: $f(\hat{x}) > \gamma_K$ thì bài toán (P) vô nghiệm. Dừng quá trình giải.

4. Ví dụ số minh họa

Xét mô hình cân bằng Nash-Cournot trong thị trường sản xuất điện với các số liệu:

$$n = 3, K = [0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,+\infty), \alpha^T = (10 \quad 10 \quad 10), P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$f_1(x) = (10 - 2x_1 - x_2 - x_3)x_1 - x_1^2,\ f_2(x) = (10 - x_1 - 3x_2 - x_3)x_2 - 2x_2^2,$$

$$f_3(x) = (10 - x_1 - x_2 - 2x_3)x_3 - 3x_3^2;$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{10} \leq \frac{x_1}{x_2 + x_3} \leq 1, \frac{1}{10} \leq \frac{x_2}{x_1 + x_3} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{10} \leq \frac{x_3}{x_1 + x_2} \leq \frac{1}{2}\}$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) : -10x_1 + x_2 + x_3 \leq 0, x_1 - 10x_2 + x_3 \leq 0, x_1 + x_2 - 10x_3 \leq 0,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 0, -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 0, -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 0\}.$$

Khi đó bài toán quy hoạch lồi toàn phương (11) có dạng:

$$\min\{f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - 10x_1 - 10x_2 - 10x_3 : x \in K \cap D\}.$$

Dùng thuật toán Hildreth-D'Esopo (hoặc các phần mềm Maple, Matlab) có thể giải được bài toán (Q) tương ứng, ở đây tác giả giải bằng phần mềm Maple 17 và thu được nghiệm:

$$\bar{x} = (1,40625; 0,78125; 0,78125)$$

Dễ dàng kiểm tra được $\bar{x} \in D$. Vậy điểm cân bằng của mô hình và mức lợi nhuận tối ưu tương ứng của các nhà máy cần tìm là:

$$x^* = (1,40625; 0,78125; 0,78125), \mathrm{f}_1(\mathrm{x}_1^*) = 5,93262, \mathrm{f}_2(\mathrm{x}_2^*) = 3,05176, \mathrm{f}_3(\mathrm{x}_3^*) = 3,05176$$

5. Kết luận

Trong bài báo này, tác giả giới thiệu cách đưa bài toán cân bằng của mô hình Nash-Cournot cho thị trường sản xuất điện phân biệt về bài toán quy hoạch lồi toàn phương và đề xuất một thuật toán giải tương ứng để tìm điểm cân bằng của mô hình. Kết quả của bài báo là một công cụ rất hiệu quả để nghiên cứu và giải mô hình Nash-Cournot trong các lĩnh vực kinh tế, tài chính, vận tải, cân bằng mạng,…

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Hiền, Lê Dũng Mưu và Nguyễn Hữu Điển, *Nhập môn giải tích lồi ứng dụng,* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2015.

[2] Trần Vũ Thiệu, *Giáo trình tối ưu tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.

[3] Trần Vũ Thiệu, *Giáo trình tối ưu phi tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2011.

[4] Le.D. Muu, V.H. Nguyen, N.V. Quy, *On Nash-Cournot oligopolistic market equilibrium models with concave cost functions*, J. of Global Optimization 41, pp. 351-364, 2008.

[5] T.D. Quoc, Le.D. Muu, *Splitting proximal point method for Nash-Cournot equilibrium models involving nonconvex cost functions*, J. Nonlinear and Convex Analysis 12, pp. 519-533, 2011.

Ngày nhận bài: 25/03/2019
Ngày nhận bản sửa: 05/04/2019
Ngày duyệt đăng: 10/04/2019